НА2-Формуле

Рунге–Кута формуле

$$n=1: \quad k_1=f(x,y), \quad y(x+h)\approx y(x)+hk_1;$$

$$n=2: \quad k_1=f(x,y), \quad k_2=f(x+th,\ y+thk_1), \quad y(x+h)\approx y(x)+\Big(1-\frac{1}{2t}\Big)hk_1+\frac{1}{2t}hk_2;$$

$$n=3: \quad k_1=f(x,y), \quad k_2=f\Big(x+\frac{1}{2}h,\ y+\frac{1}{2}hk_1\Big), \quad k_3=f(x+h,y-hk_1+2hk_2),$$

$$y(x+h)\approx y(x)+\frac{h}{6}\Big(k_1+4k_2+k_3\Big);$$

$$n=4: \quad k_1=f(x,y), \quad k_2=f\Big(x+\frac{1}{2}h,y+\frac{1}{2}hk_1\Big), \quad k_3=f\Big(x+\frac{1}{2}h,y+\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{2t}\Big)hk_1+\frac{1}{2t}hk_2\Big),$$

$$k_4=f(x+h,y+(1-t)hk_2+thk_3), \quad y(x+h)\approx y(x)+\frac{h}{6}\Big(k_1+(4-2t)k_2+2tk_3+k_4\Big).$$

Оцена грешке: $\|y(x+2h)-v_1\|\approx\frac{1}{15}\|v_1-v_2\|$.

Адамсове формуле

– Експлицитне:

$$m=1: \quad y_n=y_{n-1}+hf_{n-1};$$

$$m=2: \quad y_n=y_{n-1}+\frac{h}{2}\Big(3f_{n-1}-f_{n-2}\Big);$$

$$m=3: \quad y_n=y_{n-1}+\frac{h}{12}\Big(23f_{n-1}-16f_{n-2}+5f_{n-3}\Big);$$

$$m=4: \quad y_n=y_{n-1}+\frac{h}{24}\Big(55f_{n-1}-59f_{n-2}+37f_{n-3}-9f_{n-4}\Big).$$

–Имплицитне:

$$m=0: \quad y_n=y_{n-1}+hf_n;$$

$$m=1: \quad y_n=y_{n-1}+\frac{h}{2}\Big(f_n+f_{n-1}\Big);$$

$$m=2: \quad y_n=y_{n-1}+\frac{h}{12}\Big(5f_n+8f_{n-1}-f_{n-2}\Big);$$

$$m=3: \quad y_n=y_{n-1}+\frac{h}{24}\Big(9f_n+19f_{n-1}-5f_{n-2}+f_{n-3}\Big).$$

–Адамсова метода:

$$y_n^*=y_{n-1}+\frac{h}{24}\Big(55f_{n-1}-59f_{n-2}+37f_{n-3}-9f_{n-4}\Big)$$

$$y_n=y_{n-1}+\frac{h}{24}\Big(9f_n^*+19f_{n-1}-5f_{n-2}+f_{n-3}\Big).$$

Оцена грешке : $\|y(x_n)-y_n\|\approx\frac{1}{14}\|y_n-y_n^*\|)$.

Милнова метода

$$y_n^* = y_{n-4} + \frac{4h}{3}\Big(2f_{n-1} - f_{n-2} + 2f_{n-3}\Big); \quad y_n = y_{n-2} + \frac{h}{3}\Big(f_n^* + 4f_{n-1} + f_{n-2}\Big).$$

Оцена грешке: $\|y(x_n) - y_n\| \approx \frac{1}{29}\|y_n - y_n^*\|.$

Метода "прогонке"

-Коефицијенти:

$$\alpha_1 = \frac{B_0}{C_0}; \quad \beta_1 = -\frac{F_0}{C_0}; \quad \alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{\beta_i A_i - F_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad i = 1...n-1;$$
$$y_n = \frac{\beta_n A_n - F_n}{C_n - \alpha_n A_n}, \quad y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = \overleftarrow{0...n-1}.$$

Апроксимација y' у случају да се јавља у граничним условима

$$y_0' = \frac{y_1 - y_0}{h}, \quad y_n' = \frac{y_n - y_{n-1}}{h}; \quad y_0' = \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h}, \quad y_n' = \frac{y_{n-2} - 4y_{n-1} + 3y_n}{2h}.$$

Трећи гранични задатак

$$\begin{cases} -(a(x)y')' + c(x)y &= f(x) \\ a(p)y'(p) - \sigma_0 y(p) &= 0 \\ a(q)y'(q) + \sigma_1 y(q) &= 0. \end{cases}$$

–Дискретизација:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\Big((ay_x)_{\overline{x},i} + (ay_{\overline{x}})_{x,i}\Big) + c_i y_i &= f_i, \quad i = 1...n-1 \\ \frac{2}{h}\Big(-\frac{a_0 + a_1}{2} y_{x,0} + \sigma_0 y_0\Big) + c_0 y_0 &= f_0 \\ \frac{2}{h}\Big(\frac{a_n + a_{n-1}}{2} y_{\overline{x},n} + \sigma_1 y_n\Big) + c_n y_n &= f_n. \end{cases}$$

Схема повишене тачности

$$\begin{cases} ay''(x) + by(x) = f(x); \quad a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \\ y(0) = A \\ y(1) = B. \end{cases}$$

–Дискретизација:

$$\begin{cases} y_{\overline{x}x} + \frac{b}{a}\Big(1 - \frac{b}{a}\frac{h^2}{12}\Big)y = \frac{1}{a}\Big(1 - \frac{b}{a}\frac{h^2}{12}\Big)f + \frac{h^2}{12a}f'' \\ y_0 = A \\ y_n = B. \end{cases}$$

Параболичке парцијалне једначине

$$\begin{cases} u_t &= u_{xx} + f \\ u(x,0) &= u_0(x); \qquad 0 \le x \le 1 \\ u(0,t) &= u_1(t) \\ u(1,t) &= u_2(t); \qquad 0 \le t \le T. \end{cases}$$

–Дискретизација:

$$\begin{cases} \dfrac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \sigma \dfrac{y_{i+1}^{j+1} - 2y_i^{j+1} + y_{i-1}^{j+1}}{h^2} + (1-\sigma)\dfrac{y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j}{h^2} + \varphi_i^j \\ y_0^j = u_1^j \\ y_N^j = u_2^j \\ y_i^0 = u_0(x_i) \\ \varphi_i^j = \sigma f(x_i, t_{j+1}) + (1-\sigma) f(x_i, t_j); \quad \sigma \in [0,1]. \end{cases}$$

–Експлицитна двослојна схема:

$$y_i^{j+1} = (1-2\gamma)y_i^j + \gamma(y_{i-1}^j + y_{i+1}^j) + \tau\varphi_i^j; \quad \gamma = \frac{\tau}{h^2}.$$

–Имплицитна двослојна схема:

$$\begin{cases} \dfrac{\sigma}{h^2} y_{i-1}^{j+1} - \Big(\dfrac{1}{\tau} + \dfrac{2\sigma}{h^2}\Big) y_i^{j+1} + \dfrac{\sigma}{h^2} y_{i+1}^{j+1} = -F_i^j \\ F_i^j = \Big(\dfrac{1}{\tau} - \dfrac{2(1-\sigma)}{h^2}) y_i^j + \dfrac{1-\sigma}{h^2}\Big(y_{i+1}^j + y_{i-1}^j\Big) + \varphi_i^j. \end{cases}$$