Π-ПРОМЕНЉИВЕ ФУНКЦИЈЕ

ДЕФИНИЦИЈА. РАСТУЋА ФУНКЦИЈА $H:(c,+\infty)\to R$ ЈЕ Π-ПРОМЕНЉИВА АКО ПОСТОЈИ НЕНЕГАТИВНА ФУНКЦИЈА $a:(c,+\infty)\to R_+$ И ФУНКЦИЈА $b:(c,+\infty)\to R$, ТАКВЕ ДА ЗА СВАКО $x>0$ ВАЖИ

$$\lim_{t\to\infty}\frac{H(tx)-b(t)}{a(t)}=\ln x. \qquad (1)$$

У ТОМ СЛУЧАЈУ КОРИСТИ СЕ ОЗНАКА $H\in\Pi$ ИЛИ $H\in\Pi(a)$. ФУНКЦИЈА a ЗОВЕ СЕ ПОМОЋНА ФУНКЦИЈА ЗА Π-ПРОМЕНЉИВУ ФУНКЦИЈУ H.

- ФУНКЦИЈЕ $a(t)$ И $b(t)$ У ЈЕДНАКОСТИ (1) МОГУ СЕ ИЗАБРАТИ ТАКО ДА ЈЕ

$$b(t)=H(t), \quad a(t)=H(te)-H(t).$$

ФУНКЦИЈА $a(t)$ У ЈЕДНАКОСТИ (1) ЈЕ СПОРО ПРОМЕНЉИВА У БЕСКОНАЧНОСТИ.

- ЕКВИВАЛЕНТНИ УСЛОВИ Π-ПРОМЕНЉИВОСТИ ЗА РАСТУЋЕ И СТРОГО РАСТУЋЕ Ф-ЈЕ

- ТЕОРЕМА [ДЕ ХАН (1971)]

НЕКА ЈЕ $H:R_+\to R$ СТРОГО РАСТУЋА Ф-ЈА. ТАДА СУ ЕКВИВАЛЕНТНИ СЛЕДЕЋИ УСЛОВИ:

(а) $H\in\Pi$

(б) ЗА ПРОИЗВОЉНЕ ПОЗИТИВНЕ БРОЈЕВЕ x И $y\neq 1$ ВАЖИ

$$\lim_{t\to\infty}\frac{H(tx)-H(t)}{H(ty)-H(t)}=\frac{\ln x}{\ln y}$$

(в) ФУНКЦИЈА $H(x)-\frac{1}{x}\int_0^x H(t)\,dt$ ЈЕ СПОРО ПРОМЕНЉИВА ПРИ $x\to\infty$

(г) ПОСТОЈИ $C\in R$ И СПОРО ПРОМЕНЉИВА ФУНКЦИЈА $g(x)$ ТАКВА ДА ЈЕ

$$H(x)=c+g(x)+\int_1^x\frac{g(t)}{t}\,dt.$$

(д) ЗА СВАКО $t>0$ ВАЖИ $\lim_{x\to\infty}\dfrac{H(tx)-H(t)}{H(x)-\frac{1}{x}\int_0^x H(t)\,dt}=\ln t.$

- ТЕОРЕМА [ГЕЛУК, ДЕ ХАН (1987)]

НЕКА ЈЕ $H:R_+\to R$ РАСТУЋА ФУНКЦИЈА, $C\geq 0$, $g:[c,+\infty)\to R$ ФУНКЦИЈА ДЕФИНИСАНА СА

$$g(x)=H(x)-\frac{1}{x}\int_c^x H(t)\,dt.$$

ТАДА СУ ЕКВИВАЛЕНТНА ТВРЂЕЊА:

(а) $H\in\Pi$

(б) ФУНКЦИЈА $g:[c,+\infty)\to R$ ЈЕ ДОБРО ДЕФИНИСАНА ЗА НЕКО $c>0$ И ЗА СВАКО $x>0$ ВАЖИ $\lim_{t\to\infty}\dfrac{H(tx)-H(t)}{g(t)}=\ln x.$

(в) ФУНКЦИЈА $g:[c,+\infty)\to R$ ЈЕ ДОБРО ДЕФИНИСАНА ЗА НЕКО $c>0$ И СПОРО ПРОМЕНЉИВА У БЕСКОНАЧНОСТИ.

(г) ПОСТОЈИ СПОРО ПРОМЕНЉИВА Ф-ЈА $a(t)$ ТАКВА ДА ЈЕ $H(x)=a(x)+\int_c^x\frac{a(t)}{t}\,dt.$

ВЕЗА ИЗМЕЂУ П-ПРОМЕНЉИВИХ И СПОРО ПРОМЕНЉИВИХ ФУНКЦИЈА

ТЕОРЕМА. НЕКА ЈЕ $H: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ РАСТУЋА ФУНКЦИЈА ЗА КОЈУ ВАЖИ НЕП И НЕКА ПОСТОЈИ $\lim_{x\to\infty} H(x) = H(\infty) \leq +\infty$. ТАДА ВАЖИ:

(а) АКО ЈЕ $H(\infty) = \infty$, ОНДА ЈЕ $H \in \Pi\Pi_0$.

(б) АКО ЈЕ $H(\infty) < +\infty$, ОНДА ЈЕ $H(\infty) - H(x) \in \Pi\Pi_0$.

ПРИМЕР П-ПРОМЕНЉИВЕ ФУНКЦИЈЕ

$$H(x) = -\ln\left(-\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)\right), \quad x > 1.$$

ЗА $x>1$ И $t>1$ ВАЖИ:

$$H(tx) - H(t) = -\ln\left(-\ln\left(1-\frac{1}{tx}\right)\right) + \ln\left(-\ln\left(1-\frac{1}{t}\right)\right)$$

$$= \ln \frac{-\ln\left(1-\frac{1}{t}\right)}{-\ln\left(1-\frac{1}{tx}\right)} = \ln \frac{\frac{1}{t} + o\left(\frac{1}{t}\right)}{\frac{1}{tx} + o\left(\frac{1}{t}\right)} \longrightarrow \ln x, \quad t\to\infty.$$

$$\frac{H(tx) - H(t)}{H(te) - H(t)} \longrightarrow \frac{\ln x}{\ln e} = \ln x, \quad t \to \infty$$

9

- Γ-ПРОМЕНЉИВЕ ФУНКЦИЈЕ

ДЕФИНИЦИЈА. РАСТУЋА ФУНКЦИЈА $H:(c,x_0)\to\mathbb{R}$ ЈЕ Γ-ПРОМЕНЉИВА АКО СУ ИСПУЊЕНА СЛЕДЕЋА ДВА УСЛОВА:

(а) $\lim\limits_{x\uparrow x_0} H(x)=+\infty$,

(б) ПОСТОЈИ ФУНКЦИЈА $g:(c,x_0)\to\mathbb{R}_+$ ТАКВА ДА ЗА СВАКИ РЕАЛАН БРОЈ x ВАЖИ ЈЕДНАКОСТ

$$\lim_{x\uparrow x_0}\frac{H(t+xg(t))}{H(t)}=e^{x}. \qquad (2)$$

У ТОМ СЛУЧАЈУ КОРИСТИМО ОЗНАКУ $H\in\Gamma$ ИЛИ $H\in\Gamma(g)$. ФУНКЦИЈА g ЗОВЕ СЕ ПОМОЋНА ФУНКЦИЈА ЗА Γ-ПРОМЕНЉИВУ ФУНКЦИЈУ H.

- ПРИМЕР 1. $H:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $H(x)=|x|e^{x^2/2}$, $g(t)=\begin{cases}1 & \text{ако је } t\le 1\\ 1/t & \text{ако је } t>1\end{cases}$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{H(t+xg(t))}{H(t)}=e^{x}, \text{ тј. } H\in G$$

- ПРИМЕР 2. $H:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $H(x)=\dfrac{1}{1-e^{-e^{-x}}}$, $g(t)=1$, $H\in\Gamma$ јер важи

$$\frac{1-e^{-e^{-t}}}{1-e^{-e^{-(t+x)}}}=\frac{1-(1-e^{-t}+o(e^{-t}))}{1-(1-e^{-(t+x)}+o(e^{-t}))}=\frac{e^{-t}+o(e^{-t})}{e^{-t}e^{-x}+o(e^{-t})}\to\frac{1}{e^{-x}}=e^{x},\ t\to\infty$$

- ПОМОЋНА ФУНКЦИЈА ИЗ ЈЕДНАКОСТИ (2) ОДРЕЂЕНА ЈЕ ЈЕДНОЗНАЧНО ДО НА АСИМПТОТСКУ ЕКВИВАЛЕНТНОСТ, ТЈ. АКО СУ g_1 И g_2 ДВЕ ПОМОЋНЕ ФУНКЦИЈЕ ЗА КОЈЕ ВАЖИ (2), ОНДА ЈЕ

$$\lim_{t\uparrow x_0}\frac{g_1(t)}{g_2(t)}=1.$$

- НАПОМЕНЕ У ВЕЗИ ПРИМЕРА

АКО ЈЕ $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}dt$, ОНДА ВАЖИ $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)<1-\Phi(x)<\frac{1}{x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

$G_0(x)=e^{-e^{-x}}$ ЈЕ ФУНКЦИЈА РАСПОДЕЛЕ

- ВЕЗА ИЗМЕЂУ П-ПРОМЕНЉИВИХ И Г-ПРОМЕНЉИВИХ ФУНКЦИЈА

ТЕОРЕМА 1. АКО $H \in \Gamma$ и ако је $g(t)$ помоћна функција за H, онда $H^{-1} \in \Pi$ са помоћном функцијом $a(t) = g \circ H^{-1}(t)$.

ТЕОРЕМА 2. АКО $H \in \Pi$ и ако је $a(t)$ помоћна функција за H, онда $H^{-1} \in \Gamma$ са помоћном функцијом $g(t) = a \circ H^{-1}(t)$.

- ВЕЗА ИЗМЕЂУ Г-ПРОМЕНЉИВИХ И БРЗО ПРОМЕНЉИВИХ ФУНКЦИЈА

ТЕОРЕМА 1. АКО ЗА ФУНКЦИЈУ $H:(c, x_0) \to R_+$ ВАЖИ $H \in \Gamma$, онда је функција H брзо променљива при $x \uparrow x_0$.

ТЕОРЕМА 2. АКО ЗА ФУНКЦИЈУ $H:(c, +\infty) \to R_+$ ВАЖИ $H \in \Gamma$, онда важи:

(а) $$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln H(t)}{\ln t} = +\infty.$$

(б) $$\lim_{t\to\infty} \frac{H(tx)}{H(t)} = \begin{cases} 0 & \text{ако је } 0<x<1 \\ 1 & \text{ако је } x=1 \\ \infty & \text{ако је } x>1. \end{cases}$$

- ТЕОРЕМА [Mejzler (1949), de Haan (1970)]

НЕКА ЈЕ F ФУНКЦИЈА РАСПОДЕЛЕ И НЕКА ЈЕ H ФУНКЦИЈА ДАТА СА

$$H(x) = \frac{1}{1-F(x)}, \quad \text{ЗА } x < x_0 = \sup\{t : F(t) < 1\}$$

СЛЕДЕЋА ТРИ ТВРЂЕЊА СУ ЕКВИВАЛЕНТНА:

(а) ПОСТОЈЕ НИЗОВИ КОНСТАНТИ $a_n > 0$ И $b_n \in R$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, ТАКВИ ДА ЗА СВАКИ РЕАЛАН БРОЈ x ВАЖИ

$$\lim_{n\to\infty} F^n(a_n x + b_n) = e^{-e^{-x}}.$$

(б) $H \in \Gamma$

(в) $H^{-1} \in \Pi$.

- НАПОМЕНА. ТЕОРЕМА ЈЕ ЗНАЧАЈНА ЗА ОДРЕЂИВАЊЕ УСЛОВА ПРИ КОЈИМА ФУНКЦИЈА РАСПОДЕЛЕ F ПРИПАДА ОБЛАСТИ ПРИВЛАЧЕЊА ГУМБЕЛОВЕ РАСПОДЕЛЕ ЕКСТРЕМНИХ ВРЕДНОСТИ.

ПРАВИЛНО ПРОМЕНЉИВЕ СЛУЧАЈНЕ ВЕЛИЧИНЕ

ДЕФИНИЦИЈА. НЕНЕГАТИВНА СЛУЧАЈНА ВЕЛИЧИНА X И ЊЕНА РАСПОДЕЛА СУ ПРАВИЛНО ПРОМЕНЉИВЕ СА ИНДЕКСОМ $\alpha \geq 0$, АКО ЈЕ РЕП РАСПОДЕЛЕ $1-F(x)$ ПРАВИЛНО ПРОМЕНЉИВА ФУНКЦИЈА СА ИНДЕКСОМ $-\alpha$, ТЈ. АКО ЗА СВАКО $x>0$ ВАЖИ

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1-F(tx)}{1-F(t)} = x^{-\alpha}$$

- РЕП $1-F(x)$ ПРАВИЛНО ПРОМЕНЉИВЕ СЛУЧАЈНЕ ВЕЛИЧИНЕ СА ИНДЕКСОМ $\alpha \geq 0$ СЕ ПРЕДСТАВЉА У ОБЛИКУ

$$1-F(x) = x^{-\alpha} L(x)$$

ГДЕ ЈЕ L СПОРО ПРОМЕНЉИВА ФУНКЦИЈА У БЕСКОНАЧНОСТИ.

- НЕКА ЈЕ F ФУНКЦИЈА РАСПОДЕЛЕ ТАКВА ДА ЈЕ $x_F = \sup\{t : F(t)<1\} = \infty$. ВАЖЕ СЛЕДЕЋА ТВРЂЕЊА:

(а) НЕКА ЈЕ F АПСОЛУТНО НЕПРЕКИДНА СА ГУСТИНОМ f И ТАКВА ДА ЗА НЕКО $\alpha > 0$ ВАЖИ

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x f(x)}{1-F(x)} = \alpha \tag{1}$$

ТАДА ВАЖИ $f \in ПП_{-1-\alpha}$, А ПРЕМА ТОМЕ И $1-F \in ПП_{-\alpha}$.

(б) НЕКА ЈЕ F АПСОЛУТНО НЕПРЕКИДНА И НЕКА ЗА ЊЕНУ ГУСТИНУ f ВАЖИ $f \in ПП_{-1-\alpha}$ ЗА НЕКО $\alpha>0$. ТАДА ВАЖИ (1).

(в) НЕКА ЈЕ F АПСОЛУТНО НЕПРЕКИДНА ФУНКЦИЈА СА ГУСТИНОМ f, $1-F \in ПП_{-\alpha}$ ЗА НЕКО $\alpha>0$ И НЕКА ЈЕ f МОНОТОНА НА НЕКОМ ИНТЕРВАЛУ $(x_0, +\infty)$. ТАДА ВАЖИ (1).

(г) НЕКА ЈЕ X НЕНЕГАТИВНА СЛУЧАЈНА ВЕЛИЧИНА КОЈА ЈЕ ПРАВИЛНО ПРОМЕНЉИВА СА ИНДЕКСОМ $\alpha>0$. ТАДА ВАЖИ

$$E(X^\beta) \begin{cases} <\infty & \text{ако је } \beta<\alpha \\ =\infty & \text{ако је } \beta>\alpha. \end{cases}$$

(д) ПРЕТПОСТАВИМО ДА $1-F \in ПП_{-\alpha}$ ЗА НЕКО $\alpha>0$, И НЕКА ЈЕ $\beta \geq \alpha$. ТАДА ВАЖИ ЈЕДНАКОСТ

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\beta (1-F(x))}{\int_0^x t^\beta \, dF(t)} = \frac{\beta-\alpha}{\alpha}. \tag{2}$$

АКО ЈЕ $\beta>\alpha$ ОНДА ИЗ (2) СЛЕДИ ДА $1-F \in ПП_{\alpha}$.
АКО ЈЕ $\beta=\alpha$ ОНДА СЕ МОЖЕ САМО ЗАКЉУЧИТИ ДА ЈЕ $1-F = o(x^{-\alpha}L(x))$ КАД $x\to\infty$, ЗА НЕКУ СПОРО ПРОМЕНЉИВУ ФУНКЦИЈУ L.

(ђ) ФУНКЦИЈА $\tilde{F}(x) = \int_0^x t^2 \, dF(t)$ ЈЕ СПОРО ПРОМЕНЉИВА АКО И САМО АКО ЈЕ

$$1-F(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\int_0^x t^2 \, dF(t)\right) \text{ КАД } x\to\infty.$$

ПРОИЗВОД СЛУЧАЈНИХ ВЕЛИЧИНА

ТЕОРЕМА. Нека су X и Y независне и ненегативне случајне величине.

(а) Ако су X и Y обе правилно промењиве са индексом $\alpha > 0$, онда је XY правилно промењива сл. в. са индексом $\alpha > 0$.

(б) Нека је X правилно промењива са индексом $\alpha > 0$ и $EY^{\alpha+\varepsilon} < +\infty$ за неко $\varepsilon > 0$. Тада је производ XY правилно промењива случајна величина са истим индексом $\alpha > 0$ и важи

$$P\{XY > x\} \sim EY^{\alpha} \cdot P\{X > x\}, \quad x \to \infty.$$

- Део (б) претходне теореме доказан је у раду Breiman (1965). Део (а) следи из рада Cline (1986)

Breiman, L. (1965): On some limit theorems similar to the arc-sin law. Theory Probab. Appl. **10**, 323-331.

Cline, D.B.H. (1986): Convolution tails, product tails and domains of attraction, Probab. Theory Related Fields **72**, 529-557.

ПРАВИЛНА ПРОМЕНЉИВОСТ СЛУЧАЈНОГ ВЕКТОРА И ВИШЕДИМЕНЗИОНЕ РАСПОДЕЛЕ

ДЕФИНИЦИЈА. d-ДИМЕНЗИОНИ СЛУЧАЈНИ ВЕКТОР $X=(X_1,\dots,X_d)$ И ЊЕГОВА РАСПОДЕЛА СУ ПРАВИЛНО ПРОМЕНЉИВИ СА ИНДЕКСОМ $\alpha \geq 0$ АКО ПОСТОЈИ СЛУЧАЈНИ ВЕКТОР Θ СА ВРЕДНОСТИМА У S^{d-1}, ГДЕ ЈЕ S^{d-1} ЈЕДИНИЧНА СФЕРА У R^d У ОДНОСУ НА ДАТУ НОРМУ $|\cdot|$, ТАКО ДА ЗА СВАКО $u>0$ ВАЖИ

$$\frac{P\left\{|X|>tu,\ \frac{X}{|X|}\in\cdot\right\}}{P\{|X|>t\}} \xrightarrow{v} u^{-\alpha}P\{\Theta\in\cdot\},\quad t\to\infty \qquad (1)$$

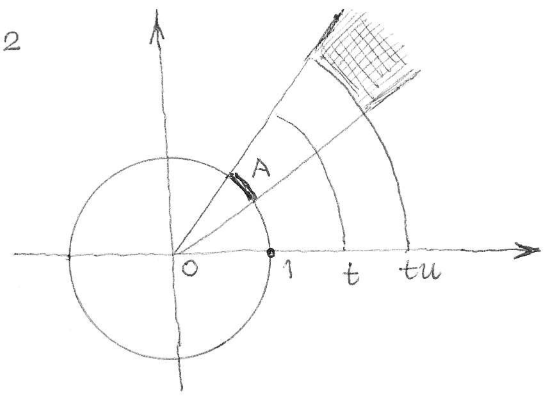
- $\xrightarrow{v}$ ЈЕ ОЗНАКА ЗА "vague convergence" МЕРА НА S^{d-1}

vague [vejg] – НЕЈАСАН, МАГЛОВИТ, НЕОДРЕЂЕН

АКО ЈЕ $\mu, \mu_1, \mu_2, \dots$ НИЗ КОНАЧНИХ МЕРА НА МЕТРИЧКОМ ПРОСТОРУ M СА σ-АЛГЕБРОМ $\mathcal{M}$ КОЈА ЈЕ ГЕНЕРИСАНА ОТВОРЕНИМ СКУПОВИМА, ОНДА ПО ДЕФИНИЦИЈИ, $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$, $n\to\infty$, АКО ВАЖИ

$\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(A)=\mu(A)$ ЗА СВАКИ СКУП $A\in\mathcal{M}$ ТАКАВ ДА ЈЕ $\mu(\partial A)=0$.

СЛУЧАЈ $d=2$



- ФОРМУЛАЦИЈА УСЛОВА ДА СВАКА ЛИНЕАРНА КОМБИНАЦИЈА КОМПОНЕНТИ СЛУЧАЈНОГ ВЕКТОРА ИМА ПРАВИЛНО ПРОМЕНЉИВУ РАСПОДЕЛУ:

ПОСТОЈИ $\alpha>0$ И СПОРО ПРОМЕНЉИВА ФУНКЦИЈА L ТАКО ДА ЗА СВАКО $x\in R^d$ ПОСТОЈИ ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ

$$\lim_{t\to\infty}\frac{P\{(x,X)>t\}}{t^{-\alpha}L(t)} = w(x)$$

И ПОСТОЈИ $x_0\in R^n$ ТАКО ДА ЈЕ $x_0\neq(0,\dots,0)$ И $w(x_0)>0$. (2)

- ТЕОРЕМА [Basrak, Davies and Mikosch (2002)]

НЕКА ЈЕ X СЛУЧАЈНИ ВЕКТОР СА ВРЕДНОСТИМА У R^d.

(а) АКО ЈЕ СЛУЧАЈНИ ВЕКТОР X ПРАВИЛНО ПРОМЕНЉИВ СА ИНДЕКСОМ $\alpha > 0$ У СМИСЛУ УСЛОВА (1), ОНДА (2) ВАЖИ ЗА ИСТУ ВРЕДНОСТ α.

(б) АКО X ЗАДОВОЉАВА УСЛОВ (2), ГДЕ ЈЕ α ПОЗИТИВАН БРОЈ КОЈИ НИЈЕ ЦЕО, ТАДА ЈЕ X ПРАВИЛНО ПРОМЕНЉИВ СА ИНДЕКСОМ α И РАСПОДЕЛА ВЕРОВАТНОЋА СЛУЧАЈНОГ ВЕКТОРА Θ ЈЕ ЈЕДНОЗНАЧНО ОДРЕЂЕНА.

(в) АКО X УЗИМА ВРЕДНОСТИ У $[0,+\infty)^d$ И ВАЖИ (2) ЗА $x \in [0,\infty)^d \setminus \{0\}$, ГДЕ ЈЕ $\alpha > 0$ И НИЈЕ ЦЕО БРОЈ, ТАДА (1) ВАЖИ ЗА ИСТО α И РАСПОДЕЛА СЛУЧАЈНОГ ВЕКТОРА Θ ЈЕ ЈЕДНОЗНАЧНО ОДРЕЂЕНА.

(г) АКО X УЗИМА ВРЕДНОСТИ У $[0,+\infty)^d$ И ЗАДОВОЉАВА (2), ПРИ ЧЕМУ ЈЕ α НЕПАРАН ПРИРОДАН БРОЈ, ОНДА ВАЖИ (1) СА ИСТИМ ИНДЕКСОМ α И РАСПОДЕЛА СЛУЧАЈНОГ ВЕКТОРА Θ ЈЕ ЈЕДНОЗНАЧНО ОДРЕЂЕНА.