IZOMETRIJE I SLIČNOSTI

U afinom prostoru E^3 zadata je transformacija
ϕ: $X' = AX + B$ gde je $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Def. Ako je $A \cdot A^T = E$ onda je ϕ IZOMETRIJA, a ako je $A \cdot A^T = \lambda \cdot E$ onda je ϕ SLIČNOST. U tom slučaju je $\lambda > 0$ pa možemo pisati $\lambda = k^2$, $k > 0$
k je koeficijent sličnosti.

1. Ako je ϕ izometrija, matrica A za sopstvene vrednosti može imati 1 i -1, a kako je dimenzije 3 ima ili jednu ili tri realne sops. vrednosti.
2. Ako je ϕ sličnost, matrica A za sops. vrednosti može imati k i $-k$ (po istom principu).
3. Ukoliko $\lambda = 1$ nije sopstvena vrednost matrice A proizvoljne transformacije ϕ, jednačina $\phi(X) = X$ ima tačno 1 rešenje, odnosno postoji TAČNO jedna fiksna tačka transf. ϕ.

Zato SLIČNOST uvek ima tačno jednu fiksnu tačku S
Tada je $\phi = H_{S,k} \circ \psi$ gde je H homotetija sa koef. k a ψ je neka izometrija. Kako je S fiksna i za ϕ i za $H_{S,k}$ fiksna je i za ψ.
Matrica trans. ϕ je A, a homotetije $k \cdot E$ pa ψ ima matricu $\frac{1}{k} A$.

Dakle, dovoljno je da analiziramo izometrije.
U opštem slučaju izometrija ϕ može, i ne mora

imati fiksne tačke. Ako nema fiksne tačke tada ϕ možemo zapisati kao $\phi = \tau_{\vec{a}} \circ \psi$ gde je $\tau_{\vec{a}}$ translacija, vektor $\vec{a}$ pripada sopst. potprostoru za $\lambda = 1$, a ψ ima bar jednu fiksnu tačku.
Kako je matrica za $\tau_{\vec{a}}$ E sledi da je matrica za ψ takođe A.

IZOMETRIJE:

sops. vrednosti		ima bar 1 f.t.	nema f.t.
1, 1, 1	:	$\boxed{\text{identitet}}$	$\boxed{\text{translacija}}$
−1 −1 −1	:	$\boxed{\text{centralna simetrija}}$	(uvek ima f.t.)
1 1 −1	:	$\boxed{\text{ravanska refleksija}}$	$\boxed{\text{klizajuća refl.}}$
−1 −1 1	:	$\boxed{\text{osna simetrija}}$	$\boxed{\text{zavojni poluobrtaj}}$
1, preostali su konjug-kompleksni	:	$\boxed{\text{osna rotacija}}$	$\boxed{\text{zavojno kretanje}}$
−1, preost su konjug-kompl	:	$\boxed{\text{osno-rotaciona refleksija}}$	(uvek ima f.t.)

1. $\phi: x' = -4x - 8y + z + 14$

$y' = 4x - y + 8z + 6$

$z' = 7x - 4y - 4z - 8$

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -8 & 1 \\ 4 & 1 & 8 \\ 7 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

$A \cdot A^T = 81 \cdot E$ pa je ϕ sličnost sa koeficijentom 9.

Nađimo fiksne tačke transformacije:

$x = -4x - 8y + z + 14$

$y = 4x - y + 8z + 6$ Rešenje je (REŠITI!)

$z = 7x - 4y - 4z - 8$ $x = 1$ $y = 1$ $z = -1$

pa je $S(1,1,-1)$ fiksna tačka preslikavanja.

Tada je $\phi = H_{S,9} \circ \psi$ gde je ψ izometrija čija je fiksna tačka S, a matrica $\frac{1}{9} \cdot \begin{bmatrix} -4 & -8 & 1 \\ 4 & -1 & 8 \\ 7 & -4 & -4 \end{bmatrix} = A$

Nađimo sopstvene vektore matrice A

$\det(A - \lambda E) = -(1+\lambda)(1+\lambda^2)$ (izračunati!)

pa je jedina sopstvena vrednost $\lambda = -1$

Obzirom da ψ ima fiksnu tačku S i sopst. vrednost $\lambda = -1$

ψ je osnorotaciona refleksija.

Sopstveni vektor za $\lambda=-1$:

$$(A-(-1)E)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 & -8 & 1 \\ 4 & 8 & 8 \\ 7 & -4 & 5 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} 5v_1-8v_2+v_3&=0 \\ 4v_1+8v_2+8v_3&=0 \\ 7v_1-4v_2+5v_3&=0 \end{aligned} \Rightarrow \quad v_1=2v_2 \quad v_3=-2v_1$$

$\Rightarrow$ sopstveni vektor $v=(2,1,-2)$

Ako je p prava određena tačkom S i vektorom v a π ravan koja sadrži S i normalna je na p tj.

π: $2(x-1)+y-1+2(z+1)=0$ tada je $\psi=S_\pi \circ R_{p,\alpha}$.

Treba izračunati ~~vekt~~ ugao rotacije α.

$f_1=\frac{v}{|v|}=\frac{1}{3}(2,1,-2)$. Nađimo bilo koji vektor normalan na e_1, $f=(a,b,c)$ $(a,b,c)\circ(2,1,-2)=0 \Rightarrow 2a+b-2c=0$

npr. $(a,b,c)=(1,2,2)$. Neka je $f_2=\frac{f}{|f|}=\frac{1}{3}(1,2,2)$

tada $f_3=f_1\times f_2=\frac{1}{3}(2,-2,1)$

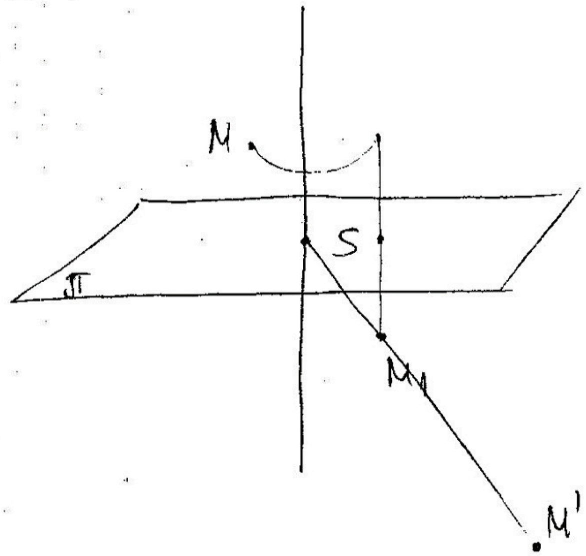
Matrica prelaska iz baze e u bazu f data je tada sa

$P=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, a u novoj bazi transformacija je

data matricom $P^TAP = \underset{\text{IZRAČUNATI}}{\dots\dots} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Znamo (VIDETI PREDAVANJA) da je $P^TAP=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

pa dobijamo $\alpha = \frac{3\pi}{2}$



skica putanje tačke.

2. $\phi : X' = AX + B$ gde je $A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Tado je $A \cdot A^T = E$ pa je transformacija izometrija.

Nadimo fiksne tačke.

$$x = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - 2$$
$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z$$
$$z = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z + 1$$

(REŠITI!) Ovaj sistem nema rešenja pa je $\phi = \tau_{\vec{a}} \circ \psi$ gde je

ψ izometrija sa istom matricom A, ali i sa fiksnim tačkama.

Nadimo sopstvene vektore

$\det(A - \lambda E) = 0 \Rightarrow$ (IZRAČUNATI!) $\Rightarrow -(-1+\lambda)^2(1+\lambda) = 0$

$\lambda=1$: $(A-E)\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow v_1=\frac{1}{2}(v_3-v_2) \Rightarrow$

$\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=v_2\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}+v_3\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow$ sopstveni potprostor za $\lambda=1$ razapet je vektorima $e_1=(-\frac{1}{2},1,0)$ i $e_2=(\frac{1}{2},0,1)$.

$\lambda=-1$ $(A+E)\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow v_1=-2v_3,\ v_2=-v_3$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=v_3\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow$ sopstveni potprostor za $\lambda=-1$ razapet je sa vektorom $e_3=(-2,-1,1)$.

Obzirom da φ ima bar jednu fiksnu tačku i da je $\lambda=1$ dvostruka sopstvena vrednost sledi da je φ ravanska simetrija S_π $\pi \parallel \mathcal{L}(e_1,e_2)$.

Vektor translacije je paralelan $\mathcal{L}(e_1,e_2)$ pa je $\phi=T_{\vec{a}}\circ S_\pi$ klizajuća refleksija. Odredimo ravan π.

Ako je M proizvoljna tačka prostora ona će pripadati ravni π ako i samo ako je vektor $\overrightarrow{MM'}$ $M'=\phi(M)$ paralelan ravni π.

$\overrightarrow{MM'}=(x'-x,y'-y,z'-z)=\left(-\frac{2}{3}(3+2x+y-z),\frac{1}{3}(-2x-y+z),\frac{1}{3}(3+2x+y-z)\right)$

Obzirom da je $e_3\perp\pi$ važi

$\overrightarrow{MM'}\parallel\pi \iff \overrightarrow{MM'}\cdot e_3=0$ tj.

$-2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)(3+2x+y-z)-\frac{1}{3}(-2x-y+z)+\frac{1}{3}(3+2x+y-z)=0$

odnosno $5+4x+2y-2z=0$ pa je ovo jednačina ravni π.

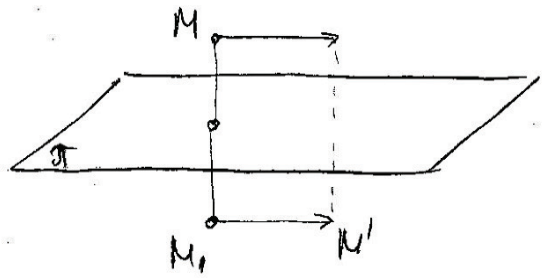
Neka je sada $M \in \pi$ proizvoljna tačka npr.

$M\left(-\frac{5}{4}, 0, 0\right)$. $\quad \phi(M) = T_{\vec{a}} \circ S_{\pi}(M) = T_{\vec{a}}(M) \Rightarrow$

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{a}$$

$$\phi(M): \quad A \cdot \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{19}{12} \\ \frac{5}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} \Rightarrow M' = \left(-\frac{19}{12}, \frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MM'} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right) \quad \Rightarrow \vec{a} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right)$$



Skica putanje tačke.

3. $\phi: X' = AX + B \qquad A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}$

Obzirom da je $A \cdot A^T = E$ sledi da je ϕ izometrijska transformacija.

Potražimo fiksne tačke. Sistem

$$x = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z + 3$$
$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + 1$$
$$z = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z + 8$$

nema rešenja (IZRAČUNATI!) pa ϕ nema fiksnih tačaka.

Zato $\phi = T_{\vec{a}} \circ \psi$ gde je ψ izometrija sa matricom A koja ima fiksne tačke.

Nađimo sopstvene vektore matrice A

$\det(A-\lambda E) = -(-1+\lambda)(1-\lambda+\lambda^2)$ (IZRAČUNATI!)

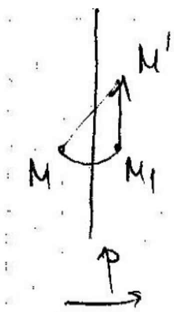
pa je $\lambda=1$ jedina sopstvena vrednost.

$\lambda=1 \quad (A-E)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1=v_2=v_3 \Rightarrow$

sopstveni potprostor je razapet vektorom $(1,1,1)=e_1$

Transformacija ψ je osna rotacija (osa rotacije je paralelna vektoru e_1), a $\phi = \tau_{\vec{a}} \circ \psi$ je zavojno kretanje.

Odredimo prvo osu rotacije.



Ako je M proizvoljna tačka prostora, pripadaće osi rotacije ako i samo ako je vektor $\overrightarrow{MM'}$, $M'=\phi(M)$ paralelan vektoru e_1.

$\overrightarrow{MM'} = (x'-x, y'-y, z'-z) = \frac{1}{3}(9-x+2y-z, 3-x-y+2z, 24+2x-y-z)$

pa je $\dfrac{\frac{1}{3}(9-x+2y-z)}{1} = \dfrac{\frac{1}{3}(3-x-y+2z)}{1} = \dfrac{\frac{1}{3}(24+2x-y-z)}{1}$

i prava p je presek ravni

$\alpha: 9-x+2y-z = 3-x-y+2z$ tj. $2+y-z=0$

i $\beta: 3-x-y+2z = 24+2x-y-z$ tj. $-7-x+z=0$

$p: \begin{matrix} 2+y-z=0 \\ -7-x+z=0 \end{matrix}$ Neka je $M \in p$ proizvoljna tačka npr.

$M(-6,-1,1)$ Tada $\Phi(M) = T_{\vec{a}} \circ R_{p,\alpha}(M) = T_{\vec{a}}(M)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{a}$

$\Phi(M) = (-2,3,5) \quad \Rightarrow \overrightarrow{MM'} = (4,4,4).$

Odredimo još ugao rotacije α.

$f_1 = \frac{e_1}{|e_1|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. Neka je f vektor normalan na e_1

$f = (a,b,c) \Rightarrow a+b+c=0$ npr $(1,-1,0)$

$f_2 = \frac{f}{|f|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0) \quad f_3 = f_1 \times f_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$

Matrica prelaska sa stare na novu bazu je

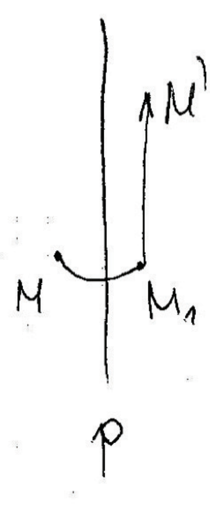
$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

a matrica preslikavanja u novoj bazi

$$P^T A P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{(IZRAČUNATI!)}$$

Obzirom da je

$$P^T A P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{3}$$



skica pritanje tacke

4. $\phi: X' = AX + B \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

$A \cdot A^T = 9 \cdot E \Rightarrow \phi$ je sličnost sa koeficijentom 3.

Nađimo fiksnu tačku:

$$\begin{aligned} x &= 2x - 2y + z + 1 \\ y &= 2x + y - 2z + 2 \\ z &= x + 2y + 2z - 1 \end{aligned} \Rightarrow \text{(IZRAČUNATI!)} \quad x = -\frac{1}{2},\ y = \frac{1}{2},\ z = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow S\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ je fiksna tačka.

$\phi = H_{S,3} \circ \psi$ ψ je izometrija sa matricom $\frac{1}{3}A$ i fiksnom tačkom S.

Nađimo sopstvene vektore za ψ

$\det\left(\frac{1}{3}A - \lambda E\right) = -(-1+\lambda)\,\frac{3 - 2\lambda^2 + 3\lambda^2}{3} \Rightarrow \lambda = 1$ je jedina sopstvena vrednost.

$\lambda = 1 \quad (A - E)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = 0 \quad v_1 = v_3 \Rightarrow$

sopstveni potprostor je razapet vektorom $(1,0,1) = e$

ψ je osna rotacija $\mathcal{R}_{p,\alpha}$ gde je p prava određena tačkom S i vektorom e. Treba još odrediti ugao rotacije α.

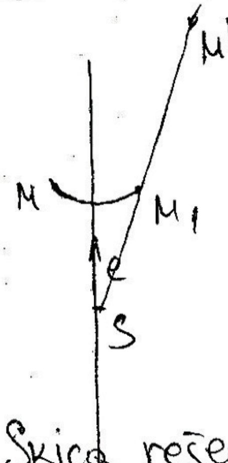
$f_1 = \frac{e}{|e|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$. Neka je $f \perp f_1$ npr $(0,1,0)$.

Tada $f_2 = \frac{f}{|f|} = (0,1,0)$ $f_3 = f_1 \times f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)$

Matrica prelaska u novu bazu je

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \Rightarrow P^T A P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

a važi $P^T A P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ pa je $\alpha = \arccos\frac{1}{3}$.



Skica putanje tačke.

5. Skica rešenja:

$\Phi: X' = AX + B$ $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$A \cdot A^T = 9E \Rightarrow \Phi$ je sličnost sa koeficijentom 3

Fiksna tačka:

$$\begin{aligned} x &= -x - 2y + 2z + 1 \\ y &= -2x + 2y + z + 1 \\ z &= 2x + y + 2z \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ (REŠITI!) $S(\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, -\frac{3}{8})$ je fiksna tačka.

Tada $\Phi = \mathcal{H}_{S,3} \circ \psi$ gde je S fiksna tačka i za ψ i $[\psi] = \frac{1}{3}A$.

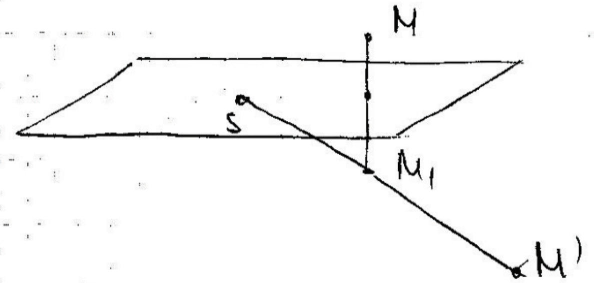
Sopstveni vektori:

$$\det\left(\tfrac{1}{3}A-\lambda E\right) = -(-1+\lambda)^2(1+\lambda) \quad \text{(IZRAČUNATI!)}$$

$$\lambda = 1: \quad (A-E)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (v_1, v_2, v_3) \in \mathcal{L}\Big(\underbrace{(\tfrac{1}{2}, 0, 1)}_{e_1}, \underbrace{(-\tfrac{1}{2}, 1, 0)}_{e_2}\Big)$$

$$\lambda = -1: \quad (A+E)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (v_1, v_2, v_3) \in \mathcal{L}\big(\underbrace{(-2, -1, 1)}_{e_3}\big)$$

ψ je ravanska simetrija S_π gde je $\pi = \langle S, e_1, e_2 \rangle$



Skica putanje tačke.

6. Skica rešenja:

$$\phi: \; X' = AX + B \qquad A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$A \cdot A^T = E \quad \Rightarrow \phi$ je izometrija

Fiksne tačke:

$$\begin{aligned} x &= -\tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{3}y + \tfrac{2}{3}z \\ y &= -\tfrac{2}{3}x + \tfrac{2}{3}y + \tfrac{1}{3}z + 1 \\ z &= \tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{3}y + \tfrac{2}{3}z + 2 \end{aligned}$$

nema rešenja $\Rightarrow$ nema fiksnih tačaka

$\phi = T_{\vec{a}} \circ \psi \quad$ gde $[\psi] = [\phi]$ i ψ ima fiksne tačke

Sopstvene vrednosti i vektori:

$\det(A-\lambda E) = -(-1+\lambda)^2(1+\lambda) \Rightarrow \lambda_{1,2}=1 \quad \lambda_3=-1$

$\lambda_{1,2}=1$ sopstveni potprostor je $\mathcal{L}\left(\left(\frac{1}{2},0,1\right),\left(-\frac{1}{2},1,0\right)\right)$

$\lambda_3=-1$ sopstveni potprostor je $\mathcal{L}(-2,-1,1)$

ψ je ravanska simetrija S_π i

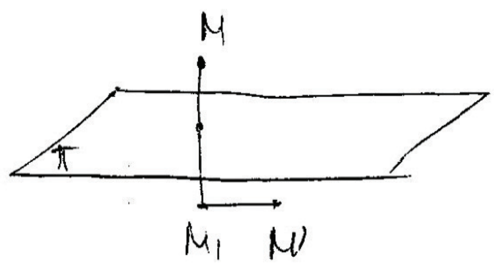
$\pi \parallel \mathcal{L}\left(\left(\frac{1}{2},0,1\right),\left(-\frac{1}{2},1,0\right)\right)$ a ϕ je klizajuća simetrija.

$M \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} \circ (-2,-1,1) = 0 \Leftrightarrow 1+4x+2y-2z=0$

$\Rightarrow \pi: 1+4x+2y-2z=0$

Npr $M\left(-\frac{1}{4},0,0\right) \Rightarrow M' = \Phi(M) \quad M'\left(\frac{1}{12},\frac{7}{6},\frac{11}{6}\right)$

$\overrightarrow{MM'} = \vec{a} = \left(\frac{1}{3},\frac{7}{6},\frac{11}{6}\right)$



Skica putanje tačke.