Diferencijalna geometrija, domaći zadatak 1, 2016-2017.

1. (a) Neka je $G \times M \to M$ slobodno i diskretno dejstvo grupe G na mnogostrukost M. Pokazati da je mnogostrukost M/G orijentabilna ako i samo ako postoji orijentacija na M invarijantna u odnosu na sve difeomorfizme $\phi_g, g \in G$.

   (b) Neka je X vektorsko polje mnogostrukosti M. Pokazati da postoji vektorsko polje Y na M/G, takvo da su X i Y π povezana, gde je $\pi : M \to M/G$ ako i samo ako je X invarijantno u odnosu na sve difeomorfizme $\phi_g, g \in G$, tj, $d\phi_g(X_p) = X_{\phi_{g(p)}}$.

   (c) Pokazati da je $RP^3 = S^3/\{id, i\}$ paralelizabilna mnogostrukost.

2. (a) Označimo sa $T_1S^2 = \{(p, v)|p \in S^2, v \in T_pS^2, \|v\| = 1\}$. Pokazati da T_1S^2 ima diferencijabilnu strukturu takvu da je $\pi : T_1S^2 \to S^2$, dato sa $\pi(p, v) = p$ diferencijabilno raslojenje i odrediti vlakna.

   (b) Pokazati da je RP^3 difeomorfno T_1S^2.

   (c) Da li je raslojenje π trivijalno?

   (d) Neka je (U_N, ϕ_N) karta sfere S^2 koja odgovara stereografskoj projekciji iz $N = (0, 0, 1)$ sa lokalnim koordinatama x, y. Neka je dx kovektorsko polje na $S^2\backslash\{N\}$. Naći jednu kartu T_1S^2 koja ne sadrži tačke (N, v) i izraziti $d\pi^*(dx)$ u koordinatnom pokretnom reperu kotangentnog raslojenja te karte.