

5. Афине трансформације

Прво ћемо се подсетити појмова *афиног простора* и *потпростора*, *афиног репера* и *афиних координата тачака*

Дефиниција

Нека је V n -димензиони, векторски простор над пољем \mathbb{R} и \mathcal{A} скуп, чије елементе називамо **тачкама**. Нека је, даље, $+$: $\mathcal{A} \times V \rightarrow \mathcal{A}$ пресликавање за које важи:

- 1) $A + \vec{0} = A$, за сваку тачку $A \in \mathcal{A}$;
- 2) $(A + u) + v = A + (u + v)$, за сваку тачку $A \in \mathcal{A}$ и произвољне $u, v \in V$;
- 3) за произвољне две тачке $A, B \in \mathcal{A}$ постоји тачно један вектор $u \in V$, такав да је $A + u = B$.

Тада уређену тројку $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, V, +)$ називамо n -димензионим **афиним простором**. Вектор u , такав да је $A + u = B$ означавамо још $u = \vec{AB}$. Векторски простор V називамо **директрисом** простора \mathcal{A} .

Нека је даље $O \in \mathcal{A}$ произвољна тачка, и $e = (e_1, \dots, e_n)$ једна база векторског простора V .

Ако је $X \in \mathcal{A}$ произвољна тачка, тада постоје јединствени $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ такви да је $\overrightarrow{OX} = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$. Тада су (x_1, \dots, x_n) координате вектора \overrightarrow{OX} у бази e и идентификујемо их.

Дефиниција

Уређени пар (O, e) називамо **афиним репером**, а n -торку (x_1, \dots, x_n) **координатама** тачке X у реперу Oe .

Ако су $[A], [B], [u]$ координате тачака A и B у датом реперу и вектора u у датој бази, онда је $[u] = [B] - [A]$.

Нека је (O', f) неки други репер афиног простора.

Нека је M матрица преласка са базе e на базу f директрисе V , тј. нека је $f = Ae$ и означимо са $[O']$ и колону координата те тачке у реперу (O, e) .

Ако су $[X]$ и $[X']$ колоне координата произвољне тачке X у реперима (O, e) и (O', f) , тада је $\overrightarrow{OX} = [X]^t e$, $\overrightarrow{O'X} = [X']^t f$.

Зато је

$$[X]^t e = \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'X} = [O']^t e + [X']^t f = ([O']^t + [X']^t M)e,$$

те су формуле промене координата дате на следећи начин

$$X = M^t X' + O'.$$

Ако је $\mathcal{P} \subset \mathcal{A}$ и при том, постоји векторски потпростор $U \subset V$ такав да пресликавање $+$ слика $\mathcal{P} \times U$ на \mathcal{P} , онда је $(\mathcal{P}, U, +)$ **афини потпростор** простора \mathcal{A} .

При том је $(\mathcal{P}, U, +)$, по дефиницији, афини простор димензије $\dim U$. Ако је $P \in \mathcal{P}$ произвољна тачка означавамо овај потпростор и са $P + U$.

Пример Уочимо да су еуклидска права, раван и простор, уједно и реални афини простори димензија 1, 2 и 3. При том су стандардне координате заправо афине координате у односу на репер Oe , где је O координатни почетак, а база е ортонормирана база $\vec{i}, (\vec{i}, \vec{j}), (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Правна p у еуклидској равни или простору \mathbb{R}^n , $n = 2, 3$ је афини потпростор димензије 1. Ако је P произвољна тачка те праве и v вектор који је одређује, можемо писати да је $p = P + \mathcal{L}\{v\}$.

Пример ...Раван π у еуклидском простору \mathbb{R}^3 је афини потпростор димензије 2. Ако је $P \in \pi$ и ако су v_1, v_2 два неколинерна вектора те равни онда је $\pi = P + \mathcal{L}\{v_1, v_2\}$.

Дефиниција

Нека је \mathcal{A} n -димензиони афини простор и \mathcal{P} његов потпростор димензије $(n - 1)$. Тада је \mathcal{P} **хиперраван** простора \mathcal{A} .

Нека је $\mathcal{P} = P + \mathcal{L}\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ и O_e дати репер простора \mathcal{A} у коме тачка P има координате (p_1, \dots, p_n) . Тада је и $v_i = \sum_j \alpha_j^i e_j$ за неке $\alpha_j^i \in \mathbb{R}$. Тачка X са координатама (x_1, \dots, x_n) припада тој равни ако и само ако $\overrightarrow{PX} \in \mathcal{L}\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$, односно ако је детерминанта

$$\det \begin{bmatrix} x_1 - p_1 & \dots & x_n - p_n \\ v_1^1 & \dots & v_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ v_{n-1}^1 & \dots & v_{n-1}^n \end{bmatrix}$$

једнака нули. Зато је хиперраван описана линеарном једначином

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + b = 0. \quad (1)$$

Обрнуто, ако координате тачака P и X задовољавају једначину (1), координате вектора \overrightarrow{PX} задовољавају хомогену једначину $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$, те $\overrightarrow{PX} \in U$, где је U један $(n - 1)$ -димензиони векторски простор решења ове хомогене једначине.

Афине трансформације.

Нека је $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, V, +)$ реални афини простор.

Нека је $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ бијективно пресликавање такво да за $B = A + u$ и $D = C + u$ важи $\sigma(B) - \sigma(A) = \sigma(D) - \sigma(C)$. Тада пресликавање σ индукује пресликавање $\bar{\sigma} : V \rightarrow V$ дато са

$$\bar{\sigma}(\overrightarrow{AB}) = \sigma(B) - \sigma(A).$$

Ако је пресликавање $\bar{\sigma}$ линеарно, онда је σ **афина трансформација** простора \mathcal{A} , а $\bar{\sigma}$ њен **линеарни део**.

Пример Уочимо да су све сличности (дакле и изометрије) простора \mathbb{R}^n његове афине трансформације.

Тврђење

Нека је σ афина трансформација простора \mathcal{A} . Тада је $\bar{\sigma}$ аутоморфизам векторског простора V .

Доказ. С обзиром да је $\bar{\sigma} : V \rightarrow V$ линеарно пресликавање, да би био аутоморфизам довољно је показати да је инјективно. Ако постоји $v \neq 0$ вектор такав да је $\bar{\sigma}(v) = 0$, тада за произвољни пар тачака A, B такав да је $A + v = B$ важи $\sigma(A) = \sigma(B)$, те тада σ није бијекција. \square

Нађимо координатни запис формула једне афине трансформације. Нека је O координатни почетак, и нека је X произвољна тачка, а $\sigma(X) = X'$. Означаваћемо колону координата произвољне тачке истом ознаком као и тачку. Тада је $\bar{\sigma}(\overrightarrow{OX}) = \overrightarrow{O'X'}$, па постоји квадратна матрица A таква да је $X' - O' = A(X - O)$, те је

$$X' = AX + O'.$$

При том, како је $\bar{\sigma}$ бијективно пресликавање, матрица A је недегенерисана, односно $\det A \neq 0$. Видимо да формуле афине трансформације имају исти облик као формуле промене координата приликом промене афиног репера.

Нека су $\sigma_i : X' = A_i X + B_i, i = 1, 2$ две афине трансформације једног простора. Тада њихова композиција $\sigma_2 \circ \sigma_1$ има формуле $X' = A_2(A_1 X + B_1) + B_2$, односно

$$X' = A_2 A_1 X + (A_2 B_1 + B_2),$$

а како је $\det A_2 A_1 = \det A_2 \det A_1 \neq 0$, поново представља једну афину трансформацију.

Одавде следи и да је $\sigma : X' = A_1^{-1} X + (-A_1^{-1} B_1)$ афина трансформација инверзна трансформацији σ_1 .

Зато важи следеће тврђење.

Тврђење

Скуп афиних трансформација простора \mathcal{A} је група у односу на композицију трансформација.

Дефиниција

Групу афиних трансформација афиног простора \mathcal{A} означавамо са $Aff(\mathcal{A})$.

Примедба Уочимо да су групе изометрија еуклидске равни $Iso(\mathbb{R}^n)$ и сличности $Sim(\mathbb{R}^n)$ подгрупе групе $Aff(\mathbb{R}^n)$.

Тврђење

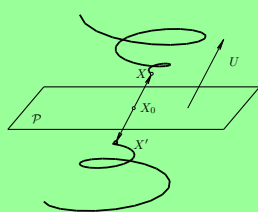
Афина трансформација σ :

- слика колинеарне тачке у колинеарне. При том, чува размеру дужи њима одређених.
- слика афини потпростор у афини потпростор исте димензије.
- слика паралелне афине потпросторе у паралелне афине потпросторе.

Доказ. Нека су A, B, C три разне колинеарне тачке и A_1, B_1, C_1 њихове слике у трансформацији σ . Тада постоји $\lambda \in \mathbb{R}$ такво да је $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$. При том је $\overline{\sigma}(\overrightarrow{AC}) = \lambda \overline{\sigma}(\overrightarrow{AB})$, односно $\overrightarrow{A_1C_1} = \lambda \overrightarrow{A_1B_1}$. Зато су A_1, B_1 и C_1 колинеарне и при том је размера дужи њима одређених иста.

Тврђења под б) и в) сада директно следе. \square

Пример Нека је $\mathcal{P} = P + W$ потпростор афиног простора \mathcal{A} са директрисом V . Нека је U векторски потпростор простора V , таква да је $W \oplus U = V$.



Посматрајмо пресликавање σ чије су инваријантне тачке тачке потпростора \mathcal{P} , па тиме и $\overline{\sigma}(w) = w$, за $w \in W$. Нека је при том, $\overline{\sigma}(u) = -u$, за $u \in U$.

Пример ... Ако је w_1, \dots, w_k једна база простора W и u_1, \dots, u_l база простора U тада у бази w_1, \dots, u_l пресликавање $\overline{\sigma}$ има матрицу

$$\begin{bmatrix} E_k & 0 \\ 0 & -E_l \end{bmatrix}, \quad (2)$$

те је у питању афина трансформација. Називамо је **афином симетријом** у односу на потпростор \mathcal{P} паралелно U (или **рефлексијом** за $k = n - 1$) и означавамо $\mathcal{S}_{\mathcal{P}, U}$.

У случају еуклидског простора, уз додатни услов да су простори W и U ортогонални, ова трансформација је еуклидска симетрија у односу на \mathcal{P} . Очигледно је и да уколико нека трансформација σ има бар једну инваријантну тачку и у некој бази матрицу (2), онда је σ афина симетрија.

Као и у случају изометрија, сопствене вредности и постојање инваријантних тачака су неопходне информације за класификовање афиних трансформација.

Нека је $X' = AX + B$. Матрица A има n сопствених вредности над пољем комплексних бројева. При том, ако је $\lambda \in \mathbb{C}$ сопствена вредност тада је то и $\bar{\lambda}$. За разлику од ортогоналних матрица, ипак није нужно и да постоји база простора састављена од сопствених вектора. Ипак, постоји база у којој је матрица пресликавања дата у **Жордановој нормалној форми**

$$\begin{bmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_l \end{bmatrix} \text{ где су } J_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_k & 1 & \dots \\ & & \ddots & 1 \\ & & 0 & \lambda_k \end{bmatrix}$$

Жорданови блокови.

Означаваћемо са $V_1 \oplus \dots \oplus V_l$ декомпозицију простора V где је V_k простор који одговара Жордановим блоковима за вредност λ_k .

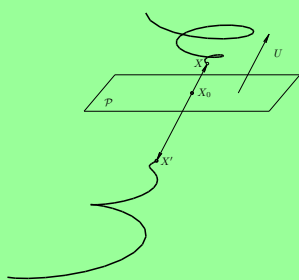
Пример Одредимо афине трансформације σ простора A чије су инваријантне тачке, тачке једне хиперравни $\mathcal{P} = P + W$.

Ако су w_1, \dots, w_{n-1} вектори базе простора W , важи да је $\sigma(w_i) = w_i$. Зато матрица пресликавања има сопствену вредност $\lambda_1 = 1$ степена бар $(n-1)$ и бар $(n-1)$ независних сопствених вектора за ту вредност. Преостала сопствена вредност λ_2 мора бити реална.

Претпоставимо прво да је $\lambda_2 \neq 1$. Тада постоји и сопствени вектор u те вредности. У бази w_1, \dots, w_{n-1}, u матрица пресликавања има облик

Пример ...

$$\begin{bmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$



Овакву трансформацију називамо **дилатацијом простора** са основом \mathcal{P} , паралелно u , са коефицијентом λ_2 и означавамо са $\mathcal{D}_{\mathcal{P}, u, \lambda_2}$.

Нека је X тачка простора која не припада хиперравни \mathcal{P} , и $s = X + \mathcal{L}\{u\}$ права. Права s продире хиперраван у тачки X_0 и при том је $\overrightarrow{X_0X}$ колинеаран са u , те се слика у $\lambda_2 \overrightarrow{X_0X} = \overrightarrow{X_0X'}$. Приметимо да је за $\lambda_2 = -1$ ова трансформација рефлексивна у односу на хиперраван \mathcal{P} паралелно вектору u .

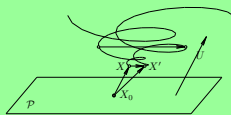
Пример Претпоставимо сада да је $\lambda_2 = 1$. Уколико постоји база простора састављена од сопствених вектора матрица пресликавања је $A = E$, а како постоје и инваријантне тачке у питању је коинциденција ε .

Пример Претпоставимо стога, да $\sigma \neq \varepsilon$. Тада постоји база простора, означимо је w_1, \dots, w_n у којој је матрица пресликавања има Жорданову форму

$$\begin{bmatrix} E_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вектори w_1, \dots, w_{n-1} разапињу раван \mathcal{P} . Нека је X произвољна тачка која не припада хиперравни \mathcal{P} , и X' њена слика. Нека је $s = X + \mathcal{L}\{w_n\}$.

Пример ...



Права s продире хиперраван \mathcal{P} у инваријантној тачки X_0 . При том је вектор $\overrightarrow{X_0 X} = k \cdot w_n$ те се слика у $k \cdot w_{n-1} + k \cdot w_n = \overrightarrow{X_0 X'}$. Зато је $\overrightarrow{XX'} = k \cdot w_{n-1}$. Ову трансформацију називамо **трансвекцијом** простора са основом \mathcal{P} у правцу вектора w_{n-1} .

Трансвекција је на јединствен начин одређена ако је при том, познат вектор w_n . Означавамо је са $T_{\mathcal{P}, w_{n-1}, w_n}$. Ако уместо вектора w_{n-1} посматрамо неки други вектор са њим паралелан, матрица трансвекције у тој бази је дата са

$$\begin{bmatrix} E_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Примедба Дакле, једине неидентичке трансформације афиног простора чији је скуп инваријантних тачака једна хиперраван су дилатације и трансвекције.

Нека је афина трансформација дата формулом $\sigma : X' = AX + B$. Сетимо се да уколико $\lambda = 1$ није сопствена вредност матрице A , тада σ има тачно једну инваријантну тачку. Ако је $\lambda = 1$ сопствена вредност, тада је $V_1 \oplus V_k$ декомпозиција простора V , где је V_1 потпростор који одговара Жордановим блоковима за $\lambda = 1$.

Слично као у случају изометрија, афина трансформација без инваријантних тачака може се записати као композиција транслације и трансформације са инваријантним тачкама.

Теорема

Нека афина трансформација $\sigma : X' = AX + B$ нема инваријантних тачака. Тада постоји афина трансформација ω са бар једном инваријантном тачком и транслација τ_v такви да је $\sigma = \tau_v \circ \omega$ и $v \in V_1$. При том, A је уједно и матрица пресликавања ω .