Основи ергодичке теорије

Зора Голубовић

29. мај 2018.

Садржај

[1]Heinz Hopf, немачки математичар
[2]Sir John Frank Charles Kingman, британски математичар

1 Предговор

Сам појам *ергодичка* датира из 1898. године, када га је први пут искористио Болцман[3] у статистичкој механици, постављајући хипотезу, која је (касније се показало) била погрешна, али је установила пут за даља истраживања. Реч *ергодичка* порекло води од грчких речи *ergon* и *odos* које означавају рад и пут.

Први строги резултат је 1931. године добио Биркхоф[4], који је доказао да је систем ергодичан ако и само ако је фазни простор немогуће разбити на суму двају инваријантних скупова, састављених од целих трајекторија, при чему сваки од њих има позитивну запремину.

Истовремено, Биркхоф је за веома уопштене услове доказао егзистенцију временских средњих вредности. Његова истраживања наставили су Нојман[5], Хинчин[6], Крилов[7], Богољубов[8] и други.

Иако се њен настанак повезује са проблемима статистичке физике, ергодичка теорија има примене и у другим научним гранама, као што су теорија вероватноће, теорија бројева, диференцијална геометрија...

Ергодичку теорију није лако дефинисати јер користи примере и технике многих научних поља. Значај ове области је управо у њеној широкој примењивости.

Природно је запитати се, шта је заправо ергодички систем? Ергодички систем је динамички систем у коме је средња вредност у времену једнака средњој вредности у простору. Објаснимо то примером лета путничког авиона између тачака A и B на земаљској кугли. Целу путању авиона поделићемо на три основна дела:
1) узлетање, које је праћено променом метеоролошких услова са порастом тренутне висине летелице (ветар, киша, притисак, температура и сл.),
2) лет авиона константном брзином на константној висини; када пилот авиона примети на мерном показивачу унапред прописану висину на којој треба да лети и зада курс летења (угао путање приближно између тачака A и B, угао равни у којој лежи путања облика кружног лука, он укључује уређај под називом аутоматски пилот који води авион све до тренутка у близини тачке B, када је потребно слетети),
3) слетање, када пилот искључује аутоматски уређај за вођење авиона и

[3]Ludwig Eduard Boltzmann, аустријски физичар и филозоф
[4]George David Birkhoff, амерички математичар
[5]Margittai Neumann Janos Lajos, мађарско-амерички математичар
[6]Александр Яковлевич Хинчин, руски математичар
[7]Алексеи Николаевич Крылов, руски математичар
[8]Николаи Николаевич Боголюбов, руски математичар

преузима команде, при чему се процес завршава приземљењем авиона.

У интервалима узлетања и слетања, промене метеоролошких услова су биле значајне, а процеси у којима су се оне јављале, математички дефинисане компликованим функцијама, имале су карактер који се не може сматрати ергодичким. Наиме, средње вредности метеоролошких параметра у простору нису се могле сматрати приближно истим као и њихове средње вредности у времену. За разлику од тога, у интервалу лета под дејством аутоматског пилота, средње вредности метеоролошких параметара у простору и њихове средње вредности у времену биле су приближно исте и могу се сматрати ергодичким. Управо захваљујући ергодичности процеса на разматраном интервалу могуће је конструисати уређај за аутоматско вођење авиона.

У случају борбених авиона ситуација је другачија, тада не можемо тврдити ергодичност.

Циљ овог рада је да, са различитих тачака гледања, прикаже неке основне резултате наведене области.

У уводу ће бити дат преглед дефиниција и тврђења неопходних за праћење остатка материјала. У наредним главама рада, најпре ће бити описана својства ергодичности, миксирања, рекурентности, еквидистрибуције, да би се потом дао преглед важних теорема ергодичности. Теорија наведена у раду ће бити пропраћена примерима, како би се указало на могућност њене примене у различитим областима.

Желим да се захвалим ментору, професору Дарку Милинковићу и члановима комисије, професорима Јелени Катић и Биљани Вујошевић, на примедбама и сугестијама током настајања овог рада.

2 Увод

При егзактном описивању физичких процеса, чији карактеристични представник је и *термодинамика у ширем смислу*, уводи се појам динамичког система. Кад се каже термодинамика у ширем смислу, мисли се на сложене физичке процесе који карактеришу, како термодинамичка кретања под дејством температурних разлика и разлика у притисцима у појединим тачкама физичке средине, тако и услед утицаја гравитационог и електромагнетног поља, односно динамичког система са плазмом[9] у комплексном физичком пољу.

Углавном, динамички систем представља математички модел неког физичког објекта, процеса или појаве. У математичком смислу динамички систем дефинисан је почетним стањем и законом промене стања[10] у времену. Притом, закон промене стања може бити детерминисаног и случајног карактера.

Динамички систем у поменутом случају карактеришу атоми плазме са својим просторно-временским координатама x_i, y_i, z_i, t_i и одговарајућим пројекцијама импулса $p_i = m_i v_i$, $i = 1, 2, \ldots N$, где је N - укупан број атома у разматраном систему који је нпр. при нормалном притиску на Земљи у $1cm^3$ у чврстом телу, реда Авогадровог броја[11]. Следи да је систем од N атома заправо $6N$ димензиони простор, што је максималан број степени слободе[12].

Међутим, у пракси рад са овим простором нема никаквог смисла, јер је број атома огроман и решење технички неизводљиво. Због тога се ова врста проблема решава коришћењем других теорија математике.

2.1 Динамички системи

Динамички систем се састоји из фазног простора и правила које одређује како фазни простор еволуира у времену. Изучаваћемо случај дискретног времена, односно разматраћемо итерације пресликавања $T : X \to X$.

Како је $T : X \to X$, итерације формирају групу ако је пресликавање инвертибилно, иначе полугрупу. Иако смо динамички систем апстрактно задали, сматраћемо да он има додатну структуру коју чува .

У даљем тексту нагласићемо када је (X, T) мерљив простор са пресликавањем које чува меру, тополошки простор са непрекидним прес-

[9] овде под појмом *плазма* подразумевамо наелектрисане атоме чије је кретање у простору и времену дефинисано напред поменутим физичким пољима

[10] за тачку у фазном простору кажемо да је микростање система

[11] Amedeo Carlo Avogadro, италијански физичар

[12] независни параметар који карактерише стање физичког система

ликавањем, метрички простор са непрекидним пресликавањем, метрички простор са изометријом или глатка многострукост са диференцијабилним пресликавањем.

Да бисмо боље разумели неке динамичке системе, тражићемо њима конјуговане и боље изучене моделе. Шта значи сам појам конјугације?

Ако имамо два динамичка система (X, T_1) и (Y, T_2) и сурјективно пресликавање $\pi : Y \to X$ тако да дијаграм

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{T_2} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ X & \xrightarrow{T_1} & X \end{array}$$

комутира, рећи ћемо да су полуконјуговани, а случај инвертибилне полуконјугације називаћемо конјугацијом. За неке класе динамичких система користићемо израз „изоморфизам”.

Ако постоји полуконјугација $\pi : Y \to X$, онда је (X, T_1) фактор (Y, T_2) и (Y, T_2) је екстензија (X, T_1). Пресликавање $\pi : Y \to X$ се још назива фактор-пресликавање или пројекција.

Дефиниција Нека је $x \in X$.

Низ $(T^j x)_{j \geq 0}$ је *параметризована орбита* пресликавања T кроз тачку x.

Скуп $\mathscr{O}^+(x) = \bigcup\limits_{j \geq 0} \{T^j(x)\}$ је *непараметризована орбита* пресликавања T кроз тачку x или трајекторија тачке x. $\square$

Рећи ћемо да је тачка $x \in X$ периодичка с периодом $N > 0$ ако је $T^N x = x$. Очигледно, период није дефинисан само за минимално N.

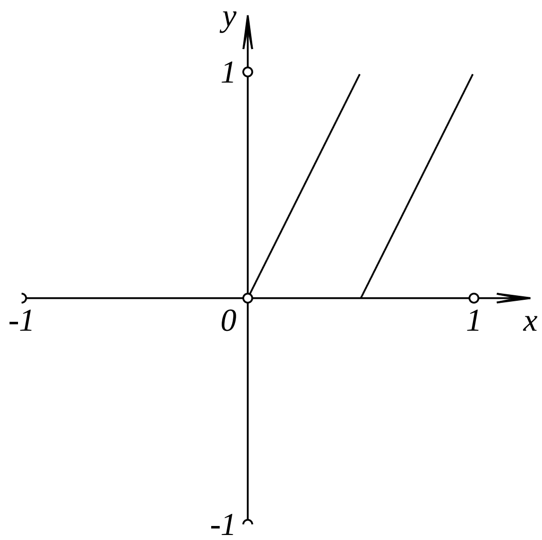
Пример 1 *Нека је $T : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $T(x) = 2x \pmod 1$ (према Слици 1).*

Периодичке тачке периоде n су облика $\frac{k}{2^n - 1}$ за $k \in \{0, 1, \ldots 2^n - 2\}$, што следи из $T^n x = x + k$ за $k \in \mathbb{Z}$, односно из $2^n x = x + k$ за $k \in \mathbb{Z}$. $\square$

Ако је пресликавање $T : X \to X$ бијекција, могу се посматрати двострани низови $(T^j x)_{j \in \mathbf{Z}}$ и дефинисати (редом) позитивна, негативна и цела орбита:

$$\mathscr{O}^+(x) = \bigcup_{j \geq 0} \{T^j(x)\}, \ \mathscr{O}^-(x) = \bigcup_{j \geq 0} \{T^{-j}(x)\}, \ \mathscr{O}(x) = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \{T^j(x)\}.$$

Покушаћемо да за задату тачку $x \in X$ одредимо будућност и реконструишемо прошлост.



Слика 1:

Пример 2 *Ригидне*[13] *ротације*

Нека је $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{2\pi i x} : x \in \mathbb{R}\}$ и посматрајмо пресликавања

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{S}^1 &\to \mathbb{S}^1 \\ e^{2\pi i x} &\mapsto e^{2\pi i (x+\alpha)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x + \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R} &\to \mathbb{S}^1 \\ x &\mapsto e^{2\pi i x} \end{aligned}$$

Дијаграм

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "p"] & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ \mathbb{S}^1 \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{S}^1 \end{tikzcd}$$

комутира.

[13] појам *ригидна* означава да се растојање честица не мења

Пресликавање Φ на количничком простору индукује пресликавање

$$\begin{aligned}\bar{\Phi} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} &\to \mathbb{R}/\mathbb{Z}\\ [x] &\mapsto [x+\alpha]\end{aligned}$$

Метрика на $\mathbb{S}^1$ и $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ се може задати са $d(e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy}) = \min\limits_{j\in\mathbb{Z}} |x-y-j|$, односно са $d([x],[y]) = \min\limits_{j\in\mathbb{Z}} |x-y-j|$.

Став 1 *Ако је $\varphi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ ригидна ротација $\varphi(e^{2\pi ix}) = e^{2\pi i(x+\alpha)}$, онда важи следеће:*

1. *Ако је $\alpha = \frac{p}{q}$ и цели бројеви p, q су узајамно прости, онда је свака орбита периодична са истим минималним периодом q.*
2. *Ако је $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, онда је свака орбита густа у $\mathbb{S}^1$.*

Доказ 1. Тривијално, да је q минималан период следи из услова да су бројеви p и q узајамно прости.

2. Приметимо да је $\varphi^j(z) \neq \varphi^k(z)$ за $j \neq k$. Како је

$$\mathbb{S}^1 = \bigsqcup_{k=1}^{N} \{e^{2\pi i\beta} : \frac{k-1}{N} < \beta \leq \frac{k}{N}\} \text{ и } |\{z, \varphi(z), \dots \varphi^N(z)\}| = N+1,$$

на основу Дирихлеовог[14] принципа следи

$$d(\varphi^j(z), \varphi^k(z)) < \frac{1}{N} \text{ за неке индексе } j,\ k.$$

Бројеви $\varphi^{(k-j)n}(z)$ у еквидистантним корацима деле $\mathbb{S}^1$, па за свако $\omega \in \mathbb{S}^1$ постоји $n \geq 0$ такво да важи $d(\omega, \varphi^{(k-j)n}(z)) < \frac{1}{N}$. □

Пример 3 *Аносовљев*[15] *дифеоморфизам*

Дефиниција Изоморфизам $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ је *хиперболички* ако важи $|\lambda| \neq 1, \lambda \in \sigma(A)$ и постоје тачке спектра које задовољавају $\lambda < 1$ као и тачке спектра које задовољавају $\lambda > 1$. □

Дефиниција Подскуп $M \subset \mathbb{R}^n$ је *хиперболички скуп* дифеоморфизма $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ако има следећа својства:

[14] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, немачки математичар

[15] Дмитрии Викторович Аносов, руски математичар

1. Mје компактан и инваријантан при T,

2. Постоји раздвајање тангентног простора у свакој тачки скупа $x \in M$,

$$\mathbb{R}^n = T_x\mathbb{R}^n = E_x^+ \oplus E_x^-, x \in M$$

које је инваријантно при линеаризацији од T,

$$dT(x)E_x^\pm = E_{T(x)}^\pm$$

и постоје константе $c > 0$ и $0 < m < 1$ независне од x за које важи

$$|dT^{\pm j}\xi| \leq cm^j|\xi|, \xi \in E_x^\pm, j \geq 0,$$

3. раздвајање $E_p^+ \oplus E_p^-$ зависи непрекидно од $p \in M$.

$\square$

Ако је M компактна глатка многострукост, дифеоморфизам $T : M \to M$ такав да је читав M хиперболички скуп се назива Аносовљев дифеоморфизам. Није сваки дифеоморфизам Аносовљев - наиме, на сфери нема таквих. Најједноставнији примери су торуси и изоморфизми на њима који немају сопствене вредности модула 1, као у примеру који следи.

Нека је $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ и T њој придружено пресликавање на $\mathbb{T}$ које делује као на слици 2.

Матрица A је инвертибилна ($\det A = 1$) и хиперболичка (има сопствене вредности $|\lambda_1| = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1 > |\lambda_2| = \frac{1}{|\lambda_1|} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$), као и само пресликавање T.

Покажимо да важе следећа својства:

1. Периодичне тачке имају рационалне координате,

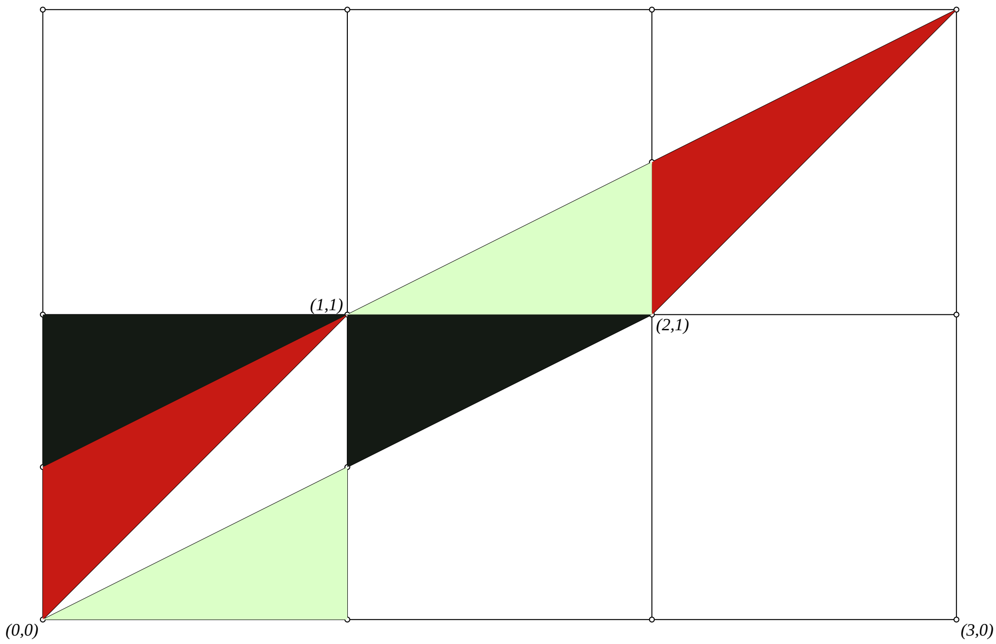
2. $|\{x \in \mathbb{T} : T^n x = x\}| = |\lambda_1^n + \lambda_2^n - 2|$.

1. Нека је $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}$ пројекција. Како је A инвертибилна матрица над прстеном $\mathbb{Z}$, то је

$$A(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2 \text{ и } A(\frac{1}{k}\mathbb{Z}^2) = (\frac{1}{k}\mathbb{Z}^2).$$

Имајући у виду да је

$$T(p(\frac{1}{k}\mathbb{Z}^2)) = p(A(\frac{1}{k}\mathbb{Z}^2)) = p(\frac{1}{k}\mathbb{Z}^2)$$



Слика 2: Аносовљев дифеоморфизам

и овај скуп је коначан (у бијекцији са $[0,1)\times[0,1)\cap\frac{1}{k}\mathbb{Z}^2$), то је T пермутација скупа и свака тачка тог скупа је периодична.

Обратно, ако је $T^n(x_1,x_2)=(x_1,x_2)$ периодичка тачка, онда је

$$A^n\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}n_1\\n_2\end{bmatrix},\ \text{ за неке } n_1,n_2\in\mathbb{Z}.$$

Како A, па ни A^n немају 1 за сопствену вредност, то важи

$$(A^n-I)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n_1\\n_2\end{bmatrix}\ \text{ и }\ \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=(A^n-I)^{-1}\begin{bmatrix}n_1\\n_2\end{bmatrix},$$

одакле следи $(x_1,x_2)\in\mathbb{Q}^2$.

2. Видели смо да периодичка тачка периода n задовољава

$$A^n\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}n_1\\n_2\end{bmatrix},\ \text{ за неке } n_1,n_2\in\mathbb{Z}.$$

Пресликавање A^n-I пресликава квадрат $[0,1)\times[0,1)$ на паралелограм $\mathscr{P}$ генерисан векторима $(A^n-I)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ и $(A^n-I)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, па је број целобројних решења једначине која дефинише периодичке тачке једнак броју тачака са целобројним координатама унутар паралелограма $\mathscr{P}$, односно броју тачака скупа $\mathbb{Z}^2 \cap \mathscr{P}$.

На основу Пикове[16] теореме:

Теорема 1 *Нека је $\mathscr{P}$ прост многоугао чија темена имају целобројне координате. Површина многоугла се рачуна по формули:*

$$P = i + \frac{b}{2} - 1,$$

где је i број унутрашњих тачака многоугла са целобројним координатама, а b број тачака са целобројним координатама рубу многоугла.

тај број је једнак управо површини паралелограма $\mathscr{P}$ која износи $|\det(A^n - I)|$.

Коначно,

$$|\{x \in \mathbb{T} : T^n x = x\}| = |\det(A^n - I)| = |(\lambda_1^n - 1)(\lambda_2^n - 1)| = |2 - \lambda_1^n - \lambda_2^n|.$$

$\square$

2.2 Транзитивни динамички системи

Нека је (X, d) метрички простор и $T : X \to X$ непрекидно пресликавање.

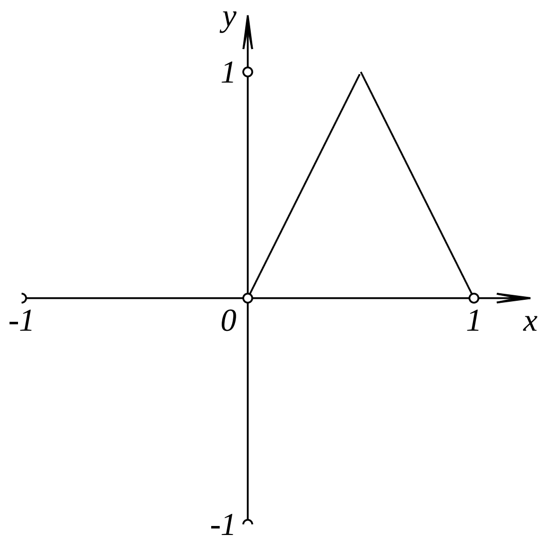
Дефиниција Динамички систем (X, T) је *транзитиван* ако T поседује густу орбиту, односно ако постоји (транзитивна) тачка $x \in X$ таква да је $\overline{\mathscr{O}^+(x)} = X$.

Систем је *минималан* ако је свака орбита густа. $\square$

Ако је систем (X, T) транзитиван, тада за свака два непразна отворена скупа $U, V \subset X$ постоји цео број $n \geq 0$ такав да важи $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Заиста, нека је x тачка чија је орбита густа. Тада, $T^j(x) \in U$ и $T^k(x) \in V$ за неке индексе $k \geq j$, $k, j \in \mathbb{Z}$. За $y = T^j(x) \in U$ и $n = k - j$ важи $T^n(y) \in V$.

Дефиниција Динамички систем је *тополошки транзитиван* ако за свака два непразна отворена скупа $U, V \subset X$ постоји цео број $n \geq 0$ такав да важи $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$. $\square$



Слика 3:

Очигледно, својство транзитивности је јаче од својства тополошке транзитивности, при условима који су почетно задати.

Пример 4 *Пресликавање* $T : [0,1] \to [0,1]$

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2x, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

(са Слике 3) је тополошки транзитивно.

Приметимо да за $I_{k,n} = [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$ и $k = 0, 1 \ldots 2^n - 1$ важи $T^n(I_{k,n}) = [0,1]$. За отворен подскуп $U \subset [0,1]$ постоји $k \in \{0, 1, \ldots 2^n - 1\}$ за које је $I_{k,n} \subset U$. Међутим, тада је и $[0,1] = T^n(I_{k,n}) \subset T^n(U) \subset [0,1]$. □

У наставку наводимо формулацију и доказ Бирхофове теореме транзитивности, којом су описани услови при којима су ови појмови еквивалентни.

Теорема 2 *Нека је метрички простор* (X, d) *комплетан и* X *поседује пребројиву базу. Нека је* $T : X \to X$ *непрекидно пресликавање.*

[16] Georg Alexander Pick, аустријски математичар

Ако за сваки пар (U, V) отворених, непразних скупова постоји цео број $n = n(U, V) \geq 0$ тако да важи

$$T^n(U) \cap V \neq \emptyset,$$

онда постоји густ скуп $R^+ \subset X$ тако да је за сваку тачку $p \in R^+$

$$\overline{\mathscr{O}^+(p)} = X.$$

Додатно, R^+ је друге категорије.

Доказ Лако се проверава да су претпоставке теореме испуњене ако је X компактан метрички простор. Како ћемо надаље радити управо са таквим скуповима, доказаћемо само овај специјалан случај теореме.

Наиме, сваки низ има конвергентан подниз (у метричким просторима, компактност и секвенцијална компактност су исто), па специјално и сваки Кошијев низ има конвергентан подниз, што значи да и сам конвергира, чиме је комплетност доказана. Како отворене лопте $\{B(x^n, \frac{1}{n}) : x^n \in X\}$ дају отворено покривање простора X за свако $n \in \mathbb{N}$, можемо изабрати коначна потпокривања $B(x_1^n, \frac{1}{n}), \ldots$ $B(x_{m_n}^n, \frac{1}{n})$ и тада је скуп $\{x_i^n : n \geq 1, 1 \leq i \leq m_n\}$ пребројив и густ у X.

За свака два отворена скупа U, V постоји $n \geq 0$ тако да важи $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Последично, $U \cap T^{-n}(V) \neq \emptyset$ и $U \cap \mathscr{O}^-(V) \neq \emptyset$. Дакле, орбита произвољног, отвореног скупа је густа у X, па на основу Берове[17] теореме категорије:

Теорема 3 *Ако је метрички простор (X, d) комплетан и $(V_j)_{j \geq 1}$ пребројива фамилија отворених и густих у X скупова, онда је њихов пребројив пресек $\bigcap\limits_{j \geq 1} V_j$ такође густ у X.*

следи, $R^+ = \bigcap\limits_{j \geq 1} \mathscr{O}^-(V_j)$ је густ у X.

Нека је $p \in R^+$. Тада, $p \in \mathscr{O}^-(V_j)$ за свако $j \geq 1$, па за свако $j \geq 1$ постоји $s \geq 0$ тако да $T^s(p) \in V_j$, одакле следи $\mathscr{O}^+(p) \cap V_j \neq \emptyset$ за свако $j \geq 1$. Према томе, за сваки отворен скуп $U \subset X$ важи $\mathscr{O}^+(p) \cap U \neq \emptyset$, односно свака орбита је густа у X. $\square$

Дефиниција Скуп $A \subset X$ је *инваријантан* при пресликавању $T : X \to X$ ако је инверзна слика $T^{-1}(A) = \{x \in X : Tx \in A\} = A$. $\square$

Став 2 *Ако је динамички систем (X, T) минималан, онда је сваки затворени инваријантни скуп $A \neq \emptyset$ једнак X.*

[17] René-Louis Baire, француски математичар

Доказ На основу инваријантности, за $x \in A$ важи $\mathscr{O}^+(x) \subset A$. Коришћењем услова минималности, добија се тражено: $X = \overline{\mathscr{O}^+(x)} \subset \overline{A} = A \subset X$. $\square$

3 Равномерно расподељени низови по модулу 1

3.1 Дефиниција и критеријуми

Нека је $(x_n)_{n\geq 0}$ реални низ. Проучаваћемо низ $x_n \pmod 1$, односно ограничићемо се на проучавање његовог разломљеног дела, тј. низа $\{x_n\} \in [0,1]$.

Дефиниција Низ x_n је *равномерно расподељен по модулу* 1 ако важи

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(\{x_j\}) = \int_0^1 f(x)dx,$$

за сваку $f \in C([0,1])$ за коју је $f(0) = f(1)$. $\square$

Став 3 (Вејлов критеријум) *Еквивалентно је следеће:*

1. *Низ x_n је равномерно расподељен по модулу* 1,

2. *За свако $a, b \in [0,1]$ важи $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{j=0}^{n-1} \chi_{[a,b]}(\{x_j\}) = b - a$.*

Доказ Импликација $(2 \implies 1)$ важи јер се свака непрекидна функција може апроксимирати линеарном комбинацијом карактеристичних функција интервала.

$(1 \implies 2)$: Нека је $\varepsilon > 0$. Карактеристична функција интервала се може апроксимирати непрекидним функцијама

$$f^+(x) = \begin{cases} 1, & a \leq x \leq b \\ \frac{x-(a-\varepsilon)}{\varepsilon}, & max\{0, a-\varepsilon\} \leq x < a \\ \frac{(b+\varepsilon)-x}{\varepsilon}, & b < x \leq min\{b+\varepsilon, 1\} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} 1, & a+\varepsilon \leq x \leq b-\varepsilon \\ \frac{x-a}{\varepsilon}, & a \leq x < a+\varepsilon \\ \frac{b-x}{\varepsilon}, & b-\varepsilon < x \leq b \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

које задовољавају $f^-(x) \leq \chi_{[a,b]}(x) \leq f^+(x)$ за $x \in [0,1]$ и чији се интеграли разликују за 2ε. Из неједнакости

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f^-(\{x_j\}) \leq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \chi_{[a,b]}(\{x_j\}) \leq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f^+(\{x_j\})$$

следи

$$b - a - 2\varepsilon \leq \int\limits_0^1 f^-(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \chi_{[a,b]}(\{x_j\}),$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \chi_{[a,b]}(\{x_j\}) \leq \int\limits_0^1 f^+(x) \leq b - a + 2\varepsilon,$$

одакле се изводи жељено. $\square$

Став 4 (Вејлов критеријум) *Еквивалентно је следеће:*

1. *Низ x_n је равномерно расподељен по модулу 1,*
2. *За свако $l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ важи $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{j=0}^{n-1} e^{2\pi i l x_j} = 0$.*

Доказ Импликација ($1 \implies 2$) се доказује применом претходног става на функцију $f(x) = e^{2\pi i l x}$.

Импликација ($2 \implies 1$) важи за тригонометријске полиноме, па на основу Вајерштрасовог[18] става о равномерној апроксимацији важи и за непрекидне функције. $\square$

Из наведеног је видљиво да је равномерна расподељеност низа у вези са густином орбита одговарајућег пресликавања. Прецизније, важи следеће

Став 5 *Ако је низ $(x_n)_{n\geq 1}$ равномерно расподељен по модулу 1, онда је $\{x_n\}$ густ у $[0,1]$.*

Доказ Нека је $x \in [0,1]$ и $\varepsilon > 0$. Треба показати да постоји n такво да $\{x_n\} \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap [0,1]$. На основу услова равномерне расподељености по модулу 1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \chi_{(x-\varepsilon,x+\varepsilon)}(\{x_j\}) = 2\varepsilon,$$

[18]Karl Theodor Wilhelm Weierstraß, немачки математичар

следи да постоји n_0 такво да за $n \geq n_0$ важи

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\chi_{(x-\varepsilon,x+\varepsilon)}(\{x_j\}) > \varepsilon > 0,$$

па постоји j за које важи $\{x_j\} \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. $\square$

Претходни ставови се уопштавају на вишедимензионе случајеве, уз услов обезбеђен следећим ставом.

Став 6 *Нека су $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_k \in \mathbb{R}$. Еквивалентно је следеће:*

1. *Низ $x_n = (\alpha_1 n, \dots \alpha_k n)$ је равномерно расподељен по модулу 1,*
2. *$\alpha_1, \dots \alpha_k$ и 1 су рационално независни.*

Доказ ($2 \implies 1$): Рационална независност значи да за $(l_1, \dots l_k) \in \mathbb{Z}^k \setminus \{0\}$ важи $l_1\alpha_1 + \dots + l_k\alpha_k \notin \mathbb{Z}$, па је $e^{l_1\alpha_1+\dots+l_k\alpha_k} \neq 1$. Зато,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}e^{2\pi i(l_1 j\alpha_1+\dots+l_k j\alpha_k)} = 0.$$

На основу Вејловог критеријума следи равномерна расподељеност низа $(\alpha_1 n, \dots \alpha_k n)$.

($1 \implies 2$): Претпоставимо да су $\alpha_1, \dots \alpha_k$ и 1 су рационално зависни. Тада постоји вектор $(l_1, \dots l_k) \in \mathbb{Z}^k \setminus \{0\}$ за који важи $l_1\alpha_1 + \dots + l_k\alpha_k \in \mathbb{Z}$. Како је $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}e^{2\pi i(l_1 j\alpha_1+\dots+l_k j\alpha_k)} = 1 \neq 0$, низ $(\alpha_1 n, \dots \alpha_k n)$ није еквидистрибуисан. $\square$

Став 7 *Нека је пресликавање $\varphi : \mathbb{T}^k \to \mathbb{T}^k$ задато са $\varphi(z_1, \dots z_k) = (e^{2\pi i\alpha_1}z_1, \dots e^{2\pi i\alpha_k}z_k)$. Ако су $\alpha_1, \dots \alpha_k$ и 1 рационално независни, онда је свака орбита пресликавања φ густа у $\mathbb{T}^k$.*

Доказ За произвољан мерљив скуп $A \subset \mathbb{T}^k$ који задовољава $m(A) > 0$, на основу вишедимензионе варијанте већ доказаног става примењеног на $f = \chi_A$, закључујемо да орбита посећује посматрани скуп бесконачно често. $\square$

Пример 5

Ирационалне ригидне ротације су транзитивне и минималне, на основу претходног става за $k = 1$. $\square$

3.2 Вејлова теорема еквидистрибуције за полиноме

Следе формулација и доказ Вејлове[19] теореме еквидистрибуције за полиноме.

Теорема 4 *Ако је бар један од коефицијената полинома* $p(n) = \alpha_k n^k + \cdots + \alpha_1 n + \alpha_0$ *ирационалан, онда је полином* $p(n)$ *униформно расподељен по модулу* 1.

Доказ **Лема 1** *Нека су* $z_0, \ldots z_{n-1} \in \mathbb{C}$ *и* $1 < m < n$. *Тада,*

$$m^2 |\sum_{j=0}^{n-1} z_j| \leq m(n+m-1)\sum_{j=0}^{n-1}|z_j|^2 + 2(n+m-1)Re\sum_{j=1}^{m-1}(m-j)\sum_{i=0}^{n-1-j} z_{i+j}\overline{z}_i.$$

Доказ Паралелограм

z_0
$z_0 \ z_1$
$z_0 \ z_1 \ z_2$
.
.
.
$z_0 \ z_1 \ z_2 \ \ldots \qquad z_{m-1}$
$\quad z_1 \ z_2 \ \ldots \qquad z_{m-1} \ z_m$
$\qquad z_2 \ \ldots \qquad z_{m-1} \ z_m \ z_{m+1}$
.
.
.
$z_{n-m} \ \cdots \qquad z_{n-1}$
$\quad z_{n-m+1} \ \cdots \qquad z_{n-1}$
.
.
.
$z_{n-2} \ z_{n-1}$
z_{n-1}

има $n+m-1$ редова.

Нека је s_j сума j. реда. Имамо $\sum\limits_{j=0}^{n+m-2} s_j = m\sum\limits_{j=0}^{n-1} z_j$, одакле применом

[19] Hermann Klaus Hugo Weyl, немачки математичар

Кошијеве неједнакости следи

$$m^2|\sum_{j=0}^{n-1} z_j|^2 = |\sum_{j=0}^{n+m-2} s_j|^2 \leq (n+m-1)\sum_{j=0}^{n+m-2}|s_j|^2.$$

Како је $|s_j|^2 = \sum_k |z_k|^2 + 2Re\sum_{k<l} z_k\overline{z_l}$, а $z_k\overline{z_l}$ се у изразу $\sum_{j=0}^{n+m-2}|s_j|^2$ јавља $m-(l-k)$ пута, то лако следи тврђење. □

Нека је $(x_n)_{n\leq 1}$ реални низ са дефинисаним низом m-разлика $x_n^{(m)} = x_{n+m} - x_n$, за $m \geq 1$.

Лема 2 *Нека је $(x_n)_{n\leq 1}$ реални низ чији је низ m-разлика равномерно расподељен по модулу 1, за свако $m \geq 1$. Тада, x_n је равномерно расподељен по модулу 1.*

Доказ За $z_j = e^{2\pi i l x_j}$ и $1 < m < n$ важи

$$\frac{m^2|\sum\limits_{j=0}^{n-1} e^{2\pi i l x_j}|}{n^2} \leq \frac{m}{n}(n+m-1) + 2\frac{(n+m-1)}{n}Re\sum_{j=1}^{m-1}\frac{m-j}{n}\sum_{i=0}^{n-1-j} e^{2\pi i l(x_{i+j}-x_j)},$$

где израз $A_{n,j} = \sum\limits_{i=0}^{n-1-j} e^{2\pi i l(x_{i+j}-x_j)}$ тежи 0 кад $n \to \infty$ за свако j, на основу равномерне расподељености низа $x_i^{(j)}$.

Имамо,

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{m^2|\sum\limits_{j=0}^{n-1} e^{2\pi i l x_j}|}{n^2} \leq \limsup\frac{m}{n}(n+m-1) = m,$$

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{|\sum\limits_{j=0}^{n-1} e^{2\pi i l x_j}|}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{m}},$$

при чему последња неједнакост важи за свако $m \geq 1$, па је

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} e^{2\pi i l x_j} = 0,$$

што значи да је низ равномерно расподељен по модулу 1. □

Вратимо се сада доказу теореме.

Доказаћемо најпре специјалан случај теореме кад је водећи коефицијент полинома ирационалан (индукцијом по степену полинома). За базу индукције $deg(p) = 1$ тврђење важи. Претпоставимо да важи за $deg(p) = k$. Тада, $p^{(m)}(n) = p(m+n) - p(n)$ је полином степена k, па је равномерно расподељен по модулу 1 на основу индуктивне хипотезе. Следи да је и $p(n)$ такав.

Докажимо сада општији случај. Нека је $p(n) = \alpha_k n^k + \cdots + \alpha_1 n + \alpha_0$ такав да за његове коефицијенте важи $\alpha_k, \ldots \alpha_{s+1} \in \mathbb{Q}$ и $\alpha_s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Тада, $p(n) = p_1(n) + p_2(n)$, за $p_1(n) = \alpha_k n^k + \cdots + \alpha_{s+1} n^{s+1}$ и $p_2(n) = \alpha_s n^s + \cdots + \alpha_1 n + \alpha_0$. Полином $p_1(n)$ је могуће написати у облику $\frac{1}{q}(m_k n^k + \cdots + m_{s+1} n^{s+1})$ за $m_j \in \mathbb{Z}$. Треба проверити да је $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{j=0}^{n-1} e^{2\pi i l p(j)} = 0$ за свако $l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Како је $j = qm + r$ за неко m и $r \in \{0, \ldots q-1\}$, а $p_1(qm+r) = d_r \pmod 1$ за $d_r \in \mathbb{Q}$ и $p_2(qm+r) = p_2^{(q,r)}(m)$ са водећим ирационалним коефицијентом, то важи

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} e^{2\pi i l p(j)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{[\frac{n}{q}]-1} \sum_{r=0}^{q-1} e^{2\pi i l d_r} e^{2\pi i p_2^{(q,r)}(m)} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{[\frac{n}{q}]}{n} \sum_{r=0}^{q-1} e^{2\pi i l d_r} \frac{1}{[\frac{n}{q}]} \sum_{m=0}^{[\frac{n}{q}]-1} e^{2\pi i p_2^{(q,r)}(m)} = \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

□

4 Ергодичност, рекурентност и миксирање

4.1 Пресликавања која чувају меру

Нека је дат коначан мерљив простор $(X, \mathscr{A}, m)$, где је X скуп, $\mathscr{A}$ σ-алгебра подскупова од X и $m : \mathscr{A} \to [0, \infty)$ коначна мера. Наведене ознаке ћемо користити и у наредним поглављима у том облику, изузев када нагласимо другачије.

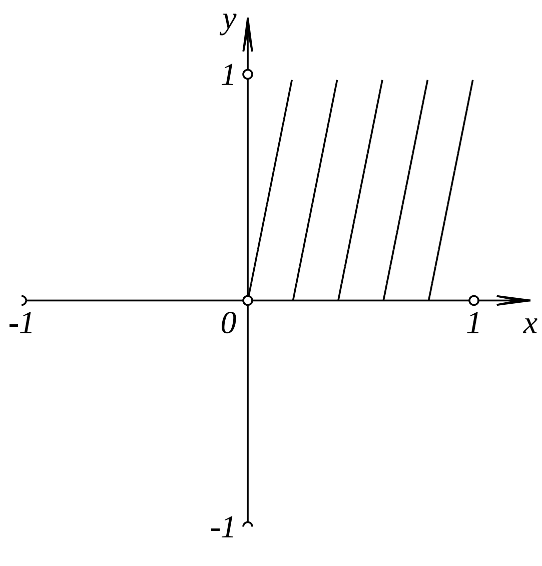
Дефиниција Пресликавање $T : X \to X$ је *мерљиво* ако је $T^{-1}(A) \in \mathscr{A}$ за сваки $A \in \mathscr{A}$.

Мерљиво пресликавање $T : X \to X$ *чува меру* ако је $m(T^{-1}(A)) = m(A)$ за свако $A \in \mathscr{A}$.

Додатно, ако T^{-1} постоји скоро свуда и мерљиво је, кажемо да је T инвертибилно пресликавање које чува меру. $\square$

Пример 6 *Нека је $T : X \to X$ мерљиво пресликавање и $T(p) = p$. Тада је Диракова*[20] *мера δ_p T-инваријантна.* $\square$

Пример 7 *Пресликавање $T : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ $T(x) = kx \pmod 1$, $k \geq 2$, $k \in \mathbb{Z}$ (Слика 4) чува Лебегову меру.*



Слика 4: за $k = 5$

[20]Paul Dirac, британски физичар

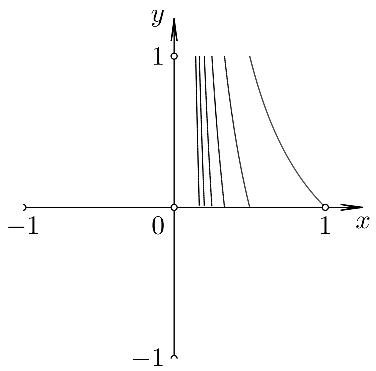
$$m(T^{-1}[a,b]) = m(\bigcup_{j=0}^{k-1}[\frac{a+i}{k}, \frac{b+i}{k}]) = k\frac{b-a}{k} = b-a = m([a,b]).$$

$\square$

Пример 8 *Гаусово*[21] *пресликавање* $T : [0,1] \to [0,1]$

$$T(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \pmod 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

(Слика 5; напомена: график је гушћи што је x *ближе 0) не чува Лебегову меру, али Гаусова мера, њој еквивалентна, задата са* $\mu(B) = \frac{1}{\ln 2}\int\limits_B \frac{dx}{x+1}$*, инваријантна је мера за Гаусово пресликавање.*



Слика 5: Гаусово пресликавање

Покажимо наведено. Најпре приметимо да је

$$m(T^{-1}[a,b]) = m(\bigcup_{n\geq 1}[\frac{1}{b+n}, \frac{1}{a+n}]) = \sum_{n\geq 1} \frac{b-a}{(a+n)(b+n)}.$$

За $[a,b] = [\frac{1}{2}, 1]$ је $m(T^{-1}[a,b]) = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{(1+2n)(1+n)} = \ln 4 - 1 < \frac{1}{2} = m([\frac{1}{2}, 1])$. Како је $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x+1} \leq 1$ за $x \in [0,1]$, то важи $\frac{1}{2\ln 2}m(B) \leq \mu(B) \leq \frac{1}{\ln 2}m(B)$,

[21] Johann Carl Friedrich Gauß, немачки математичар

односно Лебегова и Гаусова мера су еквивалентне. Гаусова мера је инваријантна мера за Гаусово пресликавање:

$$
\begin{aligned}
\mu(T^{-1}[a,b]) &= \mu(\bigcup_{n\geq 1}[\frac{1}{b+n},\frac{1}{a+n}]) = \\
&= \frac{1}{\ln 2}\sum_{n\geq 1}\int\limits_{\frac{1}{b+n}}^{\frac{1}{a+n}}\frac{1}{1+x} = \\
&= \frac{1}{\ln 2}\sum_{n\geq 1}[\ln(1+\frac{1}{a+n}) - \ln(1+\frac{1}{b+n})] = \\
&= \frac{1}{\ln 2}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}[\ln(1+\frac{1}{a+n}) - \ln(1+\frac{1}{b+n})] = \\
&= \frac{1}{\ln 2}\lim_{N\to\infty}[\ln(1+b) - \ln(1+a) + \ln(\frac{a+N+1}{b+N+1})] = \\
&= \frac{1}{\ln 2}[\ln(1+b) - \ln(1+a)] = \\
&= \frac{1}{\ln 2}\int\limits_a^b\frac{1}{x+1}dx = \\
&= \mu([a,b]).
\end{aligned}
$$

$\square$

Пример 9 *Нека је са β означен златни пресек $\beta^2 = \beta + 1$ и $T : [0,1] \to [0,1]$ $T(x) = \beta x \pmod 1$ (видети слику 6). Пресликавање T не чува Лебегову меру, али мера μ дефинисана са $\mu(B) = \int\limits_B k(x)dx$, где је*

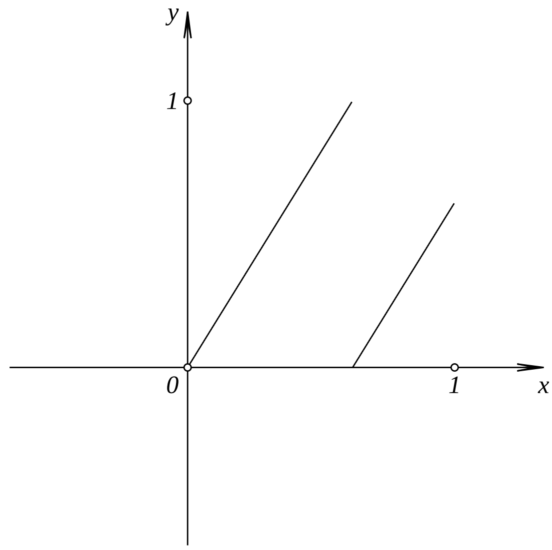
$$
k(x) = \begin{cases} \frac{1}{\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta^3}}, & x \in [0, \frac{1}{\beta}] \\ \frac{1}{\beta(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta^3})}, & x \in (\frac{1}{\beta}, 1] \end{cases}
$$

је T-инваријантна мера.

За $B = [\frac{1}{\beta}, 1]$ лако се провери да T не чува Лебегову меру скупа B,

$$
m(T^{-1}B) = \frac{\beta - 1}{\beta^2} = \frac{1}{\beta^3} \neq \frac{1}{\beta^2} = m(B).
$$

Инваријантност мере μ у односу на T се доказује за подслучајеве:



Слика 6:

1. $[a,b] \subset [0, \frac{1}{\beta}]$: Како је $T^{-1}[a,b] = [\frac{a}{\beta}, \frac{b}{\beta}] \cup [\frac{a+1}{\beta}, \frac{b+1}{\beta}]$, имамо

$$\begin{aligned}\mu(T^{-1}[a,b]) &= \frac{1}{\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta^3}} m([\frac{a}{\beta}, \frac{b}{\beta}]) + \frac{1}{\beta(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta^3})} m([\frac{a+1}{\beta}, \frac{b+1}{\beta}]) = \\ &= \frac{b-a}{\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta^3}}(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta^2}) = \\ &= \frac{b-a}{\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta^3}} = \\ &= \mu([a,b]).\end{aligned}$$

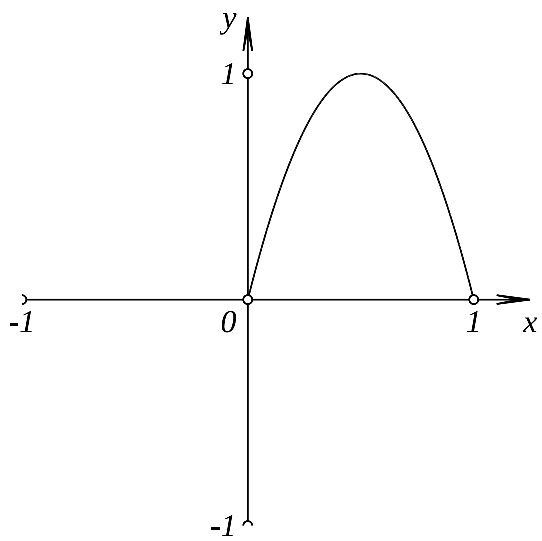
2. $[a,b] \subset [\frac{1}{\beta}, 1]$:

$$\begin{aligned}\mu(T^{-1}[a,b]) &= \mu([\frac{a}{\beta}, \frac{b}{\beta}]) = \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta^3}} \frac{b-a}{\beta} = \\ &= \mu([a,b]).\end{aligned}$$

3. $a < \frac{1}{\beta} < b$: Како је $[a,b] = [a, \frac{1}{\beta}] \cup [\frac{1}{\beta}, b]$, применом 1. и 2. тачке лако следи доказ.

$\square$

Пример 10 *Дефинишимо логистичко пресликавање* $T : [0,1] \to [0,1]$ $T(x) = 4x(1-x)$ *(Слика 7) и меру* $\mu = \frac{1}{\pi}\int\limits_{B} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx$*. Мера* μ *је вероватносна и* T*-инваријантна мера.*



Слика 7: Логистичко пресликавање

Увођењем смене $x = \sin^2\theta$, лако се проверава да важи

$$\mu([0,1]) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} d\theta = 1.$$

Како је $T^{-1}([a,b]) = [\frac{1-\sqrt{1-a}}{2}, \frac{1-\sqrt{1-b}}{2}] \cup [\frac{1+\sqrt{1-b}}{2}, \frac{1+\sqrt{1-a}}{2}]$, довољно је проверити да је $\mu([\frac{1-\sqrt{1-a}}{2}, \frac{1-\sqrt{1-b}}{2}]) = \frac{1}{2}\mu([a,b])$. Увођењем смене $y = 4x(1-x)$, имамо

$$\begin{aligned}
\mu([\frac{1-\sqrt{1-a}}{2}, \frac{1-\sqrt{1-b}}{2}]) &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{1-\sqrt{1-a}}{2}}^{\frac{1-\sqrt{1-b}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_a^b \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)}} = \\
&= \frac{1}{2}\mu([a,b]).
\end{aligned}$$

$\square$

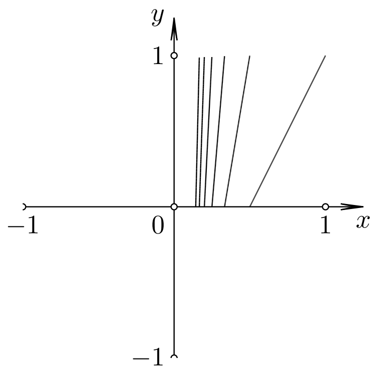
Пример 11 *Лиротово[22] пресликавање* $T : [0,1] \to [0,1]$ *(на слици 8; напомена: график је гушћи што је* x *ближе 0)*

$$T(x) = \begin{cases} n(n+1)x - n, & x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

чува Лебегову меру.

$$m(T^{-1}[a,b]) = m(\bigcup_{n\geq 1}[\frac{a+n}{n(n+1)}, \frac{b+n}{n(n+1)}]) = \sum_{n\geq 1} \frac{b-a}{n(n+1)} = b-a = m([a,b]).$$

$\square$



Слика 8: Лиротово пресликавање

Став 8 *Нека је* $(X, \mathscr{A}, m)$ *простор коначне мере. Еквивалентно је следеће:*

1. $T : X \to X$ *чува меру,*
2. $\int\limits_X f \circ T = \int\limits_X f$ *за све* $f \in L(X, \mathscr{A}, m)$.

Доказ Импликација ($2 \implies 1$) је тривијална ($f = \chi_A$).
Обратно, тврђење важи за карактеристичне функције мерљивих скупова, а на основу линеарности интеграла и за степенасте, па коначно важи и за све интеграбилне функције. $\square$

[22] Jacob Luroth, немачки математичар

Пример 12 *Нека је $T : X \to X$ мерљиво пресликавање и x периодична тачка периода n, $T^n x = x$. Тада је $\mu = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n} \delta_{T^i x}$ T-инваријантна мера.*

Доказ следи применом претходног става,

$$\int\limits_X f \circ T d\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(T^i x) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x) = \int\limits_X f d\mu.$$

$\square$

Пример 13 *Ригидне ротације из Примера 2 чувају меру.*

Уз раније уведене ознаке, довољно је проверити да је $\int\limits_{\mathbb{S}}^{1} f \circ \varphi = \int\limits_{\mathbb{S}}^{1} f$ за свако $f \in L(\mathbb{S}^1)$. Приметимо да је $F(x) = f(e^{2\pi i x})$ 1-периодична и израчунајмо

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^1 F(\Phi(x))dx &= \int\limits_0^1 F(x+\alpha)dx = \\
&= \int\limits_{\alpha}^{\alpha+1} F(x)dx = \\
&= \int\limits_{\alpha}^{1} F(x)dx + \int\limits_{1}^{\alpha+1} F(x)dx = \\
&= \int\limits_{\alpha}^{1} F(x)dx + \int\limits_{0}^{\alpha} F(x)dx = \\
&= \int\limits_0^1 F(x)dx
\end{aligned}$$

$\square$

4.2 Поенкареова теорема рекурентности

Једна од кључних тема у ергодичкој теорији је *рекурентност*, која подразумева питање колико близу почетног положаја се тачке скупа враћају при итерацијама. Поенкареова[23] рекурентност је Дирихлеов принцип ергодичке теорије; показује се да се скоро свака тачка враћа у скуп бесконачно често.

Став 9 *Нека је* $(X, \mathscr{A}, m)$ *вероватносни простор,* $T : X \to X$ *пресликавање које чува меру и* $A \in \mathscr{A}$ *мерљив скуп. Постоји мерљив скуп* $B \subset A$ *такав да је* $m(A) = m(B)$*, са својством да за свако* $x \in B$ *постоје цели бројеви* $0 < n_1 < n_2 < \dots$ *такви да* $T^{n_i}x \in A$ *за све* $i \geq 1$.

Доказ Скуп $A_0 = \{x \in A : T^n x \notin A \text{ за све } n \geq 1\}$ се може записати у облику

$$A_0 = A \cap \bigcap_{n\geq 1} T^{-n}(X \setminus A),$$

па је мерљив. За свако $n \geq 1$ је

$$T^{-n}(A_0) = T^{-n}(A) \cap \bigcap_{j\geq n+1} T^{-j}(X \setminus A),$$

одакле следи да су скупови A_0, $T^{-1}(A_0)$,... дисјунктни и мере $m(A_0)$. Важи $m(A_0) = 0$, па постоји скуп $A_1 \subset A$ такав да је $m(A_1) = m(A)$ и да се свака тачка из A_1 бар једном враћа у A при T. Применом истог аргумента на T^2, T^3, ... дефинишу се A_2, A_3, ... такви да је $m(A_n) = m(A)$ и свака тачка из A_n се враћа у A при T^n за $n \geq 1$. Скуп $B = \bigcap_{n\geq 1} A_n \subset A$ је мере $m(B) = m(A)$ и свака тачка из B се враћа у A бесконачно често. □

Претходна Поенкареова рекурентност је у потпуности последица коначне мерљивости простора, што илуструје следећи пример.

Пример 14 *Пресликавање* $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *задато са* $T(x) = x + 1$ *чува Лебегову меру. За било који ограничен скуп* $A \subset \mathbb{R}$ *и било које* $x \in A$*, скуп* $\{n \geq 1 : T^n x \in A\}$ *је коначан, па* T *нема својство рекурентности.* □

Наведени пример је један од основних разлога што ћемо пажњу ограничити на просторе коначне мере.

[23] Jules Henri Poincaré, француски математичар

4.3 Дефиниције и карактеризације ергодичности и миксирања

Дефиниција Нека је $(X, \mathscr{A}, m)$ простор коначне мере. Пресликавање $T : X \to X$ које чува меру је *ергодичко* ако за сваки T-инваријантан скуп $A \in \mathscr{A}$ важи $m(A) = m(X)$ или $m(A) = 0$. $\square$

Пример 15 *Пресликавање из Примера 4 на страници 13 је ергодичко у односу на Дираковy меру δ_0.* $\square$

Став 10 *Нека је $(X, \mathscr{A}, m)$ простор коначне мере и $T : X \to X$ пресликавање које чува меру. Еквивалентно је следеће:*

1. *T је ергодичко,*
2. *$m(T^{-1}(A)\triangle A) = 0 \implies m(A) = 0$ или $m(X \setminus A) = 0$.*

Доказ Импликација ($2 \implies 1$) је очигледна, докажимо другу.
Нека је $m(T^{-1}(A)\triangle A) = 0$. За скуп

$$B = \bigcap_{n\geq 0} \bigcup_{N\geq n} T^{-N}(A) = \bigcap_{n\geq 0} B_n$$

се проверава да је $m(B\triangle A) = 0$, што следи из

$$\begin{aligned}
&A\triangle B_n \subset \bigcup_{N\geq n} A\triangle T^{-N}(A) \text{ за свако } n \geq 0,\\
&A\triangle T^{-N}(A) \subset \bigcup_{i=0}^{N-1} T^{-i}(A)\triangle T^{-(i+1)}(A),\\
&m(T^{-i}A\triangle T^{-(i+1)}A) = 0,\\
&m(A\triangle T^{-N}(A)) = 0,\\
&m(A\triangle B_n) = 0,\\
&m(A\triangle B) = 0.
\end{aligned}$$

Како је и $T^{-1}(B) = B$, следи $m(A) = 0$ или $m(A) = m(X)$. $\square$

Став 11 *Нека је $(X, \mathscr{A}, m)$ простор коначне мере и $T : X \to X$ пресликавање које чува меру. Еквивалентно је следеће:*

1. *T је ергодичко,*
2. *$m(A) > 0 \implies m(\bigcup_{n\geq 1} T^{-n}(A)) = m(X)$.*

Доказ Импликација ($2 \implies 1$) тривијална, докажимо другу.

Нека је A скуп позитивне мере и $B = \bigcup\limits_{n \geq 1} T^{-n}(A)$. Тада је

$$m(T^{-1}(B) \triangle B) = 0 \text{ (из } T^{-1}(B) \subset B \text{ и } m(T^{-1}(B)) = m(B)),$$

а због $T^{-1}A \subset B$ и претходног става, следи $m(B) = m(X)$. $\square$

Став 12 *Нека је $(X, \mathscr{A}, m)$ простор коначне мере и $T : X \to X$ пресликавање које чува меру. Еквивалентно је следеће:*

1. *T је ергодичко.*
2. *За сваку функцију $f \in L(X, \mathscr{A}, m)$, ако је $f(T(x)) = f(x)$ за све $x \in X$, онда је $f(x)$ константна скоро свуда.*

Доказ ($2 \implies 1$): За инваријантан скуп $A \in \mathscr{A}$ важи $\chi_A(Tx) = \chi_A(x)$, па је χ_A константна скоро свуда и следи: $m(A) = 0$ или $m(A) = m(X)$.

($1 \implies 2$): Претпоставимо да не важи посматрана импликација за функцију $f \in L(X, \mathscr{A}, m)$. Тада инваријантан скуп $A = \{x \in X : f(x) \geq c\}$ има меру $0 < m(A) < m(X)$, контрадикторно ергодичности T. $\square$

Став 13 *Нека је $(X, \mathscr{A}, m)$ простор коначне мере и $T : X \to X$ пресликавање које чува меру. Еквивалентно је следеће:*

1. *T је ергодичко.*
2. *За сваку функцију $f \in L(X, \mathscr{A}, m)$ постоји нула скуп N_f такав да $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{j=0}^{n-1} f(T^j(x)) = \frac{1}{m(X)} \int\limits_X f$ за свако $x \in X \setminus N_f$.*

Доказ За доказ импликације ($1 \implies 2$) искористићемо следећу, Бирхофову теорему ергодичности, коју ћемо доказати накнадно:

Теорема 5 *Нека је $(X, \mathscr{A}, m)$ коначно-мерљив простор и $T : X \to X$ пресликавање које чува меру. За сваку интеграбилну функцију $f \in L(X, \mathscr{A}, m)$ постоји функција $f^* \in L(X, \mathscr{A}, m)$ и нула скуп $N_f \subset X$ који задовољава $T^{-1}(N_f) = N_f$ и*

1. *$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{j=0}^{n-1} f(T^j x) = f^*(x)$ за све $x \in X \setminus N_f$*
2. *$f^*(Tx) = f^*(x)$ за све $x \in X$,*

3. $\int\limits_X f^* = \int\limits_X f$,

4. $\int\limits_X |\frac{1}{n}\sum\limits_{j=0}^{n-1} f(T^j x) - f^*(x)| dm \to 0,\ n \to \infty.$

Дакле, важи $f^*(Tx) = f^*(x)$ за свако $x \in X$ и $f^* \in L(X, \mathscr{A}, m)$, па на основу већ доказане карактеризације ергодичности имамо да је f^* константна скоро свуда. На основу

$$\int\limits_X f = \int\limits_X f^* = \int\limits_X c = cm(X),$$

тврђење лако следи.

Доказ друге импликације:

$$f(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(T^j(x)) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(T^j(x)) = \frac{\int f}{m(X)}.$$

□

За сваки мерљив простор $(X, \mathscr{A}, m)$ коначне мере $m(X) > 0$ се може дефинисати нова стандардизована мера са $\mu(A) = \frac{m(A)}{m(X)}$ за $A \in \mathscr{A}$. Тада је $\mu(X) = 1$, па је $(X, \mathscr{A}, \mu)$ вероватносни простор. То ћемо имати на уму у даљем разматрању.

Став 14 *Нека је $(X, \mathscr{A}, m)$ вероватносни простор и $T : X \to X$ пресликавање које чува меру. Еквивалентно је следеће:*

1. *T је ергодичко.*

2. *За све $A, B \in \mathscr{A}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{j=0}^{n-1} m(T^{-j}(A) \cap B) = m(A)m(B)$.*

Доказ ($1 \implies 2$): за скоро свако x

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \chi_A(T^j x) \to m(A),$$

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \chi_A(T^j x)\chi_B(x) \to m(A)\chi_B(x),$$

одакле применом Лебегове теореме доминантне конвергенције следи

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} m(T^{-j}(A)\cap B) = m(A)m(B).$$

За доказ друге импликације посматрајмо инваријантан скуп $E \in \mathscr{A}$ и узмимо $A = B = E$. Важи $m(E) = m(E)^2$, одакле следи $m(E) = 0$ или $m(E) = 1$. $\square$

Став 15 *Нека је $(X, \mathscr{A}, m)$ простор коначне мере $m(X) = 1$ и $T : X \to X$ пресликавање које чува меру. Еквивалентно је следеће:*

1. *T је ергодичко.*
2. *Ако је за све $A, B \in \mathscr{A}$ $m(A)m(B) > 0$, онда за неко $n \geq 1$ важи $m(T^{-n}A \cap B) > 0$.*

Доказ Једна импликација следи на основу претходног става, докажимо и другу.

Нека је A T-инваријантан скуп. Тада је и $(X \setminus A)$ T-инваријантан. Ако би оба скупа били позитивне мере, имали бисмо $0 < m(T^{-n}A \cap (X \setminus A)) = m(\emptyset) = 0$, контрадикција. $\square$

Пример 16 *Нека је X посуда напуњена течношћу која се састоји из* 10% *џина и* 90% *мартинија. Претпоставимо најпре да је област A у X испуњена џином. Након n мућкања T, концентрација џина у произвољној запремини B посуде ће бити*

$$\frac{m(T^{-n}A \cap B)}{m(B)}.$$

Физички је природно очекивати да ће након довољног броја мућкања ($n \to \infty$) учешће џина у произвољној запремини B унутар X бити 10%.

$\square$

Претходни пример је мотивација за наредне дефиниције.

Дефиниција Нека је $(X, \mathscr{A}, m)$ вероватносни простор и $T : X \to X$ пресликавање које чува меру.

1. T је слабо миксирање ако важи

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} |m(T^{-j}(A)\cap B) - m(A)m(B)| = 0, \text{ за све } A, B \in \mathscr{A}$$

2. T је строго миксирање ако важи

$$\lim_{n\to\infty} m(T^{-n}(A)\cap B) = m(A)m(B), \text{ за све } A, B \in \mathscr{A}$$

$\square$

Строго миксирање је јаче својство од слабог миксирања, а слабо миксирање је јаче својство од ергодичности.

Став 16 *Нека је $(X, \mathscr{A}, m)$ вероватносни простор и $T : X \to X$ пресликавање које чува меру. Еквивалентно је следеће:*

1. *T је слабо миксирање,*
2. *$T \times T$ је ергодичко у односу на $m \times m$,*
3. *$T \times T$ је слабо миксирање у односу на $m \times m$,*

Доказ ($3 \implies 2$): Тривијално.
($2 \implies 1$):

Лема 3 *Нека је $(x_n)_{n\geq 0}$ ограничен низ ненегативних реалних бројева. Еквивалентно је следеће:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{j=0}^{n-1} x_j = 0$,
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{j=0}^{n-1} x_j^2 = 0$.

Доказ Доказ прве импликације је на основу услова ограничености, а друге применом Коши-Шварцове[24] неједнакости. $\square$

На основу леме је довољно проверити да важи

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} |m(T^{-j}(A)\cap B) - m(A)m(B)|^2 = 0, \text{ за све } A, B \in \mathscr{A}.$$

[24] Augustin-Louis Cauchy, француски математичар и Karl Hermann Amandus Schwarz, немачки математичар

Како је $T \times T$ ергодичко, имамо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} m(T^{-j}(A) \cap B) =$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} m^2((T \times T)^{-j}(A \times X) \cap (B \times X)) =$$
$$= m^2(A \times X) m^2(B \times X) = m(A)m(B)$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} m(T^{-j}(A) \cap B)^2 =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} m^2((T \times T)^{-j}(A \times A) \cap (B \times B)) =$$
$$= m^2(A \times A) m^2(B \times B) = m(A)^2 m(B)^2.$$

Следи,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} |m(T^{-j}(A) \cap B) - m(A)m(B)|^2 = 0.$$

($1 \implies 3$):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (m \times m)((T \times T)^{-j}(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2)) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} m(T^{-j}(A_1) \cap B_1) m(T^{-j}(A_2) \cap B_2) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} m(A_1)m(B_1) m(T^{-j}(A_2) \cap B_2) +$$
$$+ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (m(T^{-j}(A_1) \cap B_1) - m(A_1)m(B_1)) m(T^{-j}(A_2) \cap B_2) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} L_n^1 + \lim_{n\to\infty} L_n^2.$$

T је слабо миксирање, па је $\lim\limits_{n\to\infty} L_n^1 = m(A_1)m(B_1)m(A_2)m(B_2)$. Израз L_n^2 се може мајорирати изразом $\frac{1}{n} \sum\limits_{j=0}^{n-1} |m((T \times T)^{-j}(A_1) \cap B_1) - m(A_1)m(B_1)|$ који тежи 0, кад $n \to \infty$.

Следи,

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(m\times m)(T^{-j}(A_1\times A_2)\cap(B_1\times B_2)) = \\
&= m(A_1)m(B_1)m(A_2)m(B_2) = \\
&= (m\times m)(A_1\times B_1)(m\times m)(A_2\times B_2).
\end{aligned}$$

$\square$

Став 17 *Нека је $(X, \mathscr{A}, m)$ простор коначне мере $m(X) = 1$ и $T : X \to X$ пресликавање које чува меру. Еквивалентно је следеће:*

1. *T је строго миксирање,*
2. *$T \times T$ је строго миксирање у односу на $m \times m$,*

Доказ ($1 \implies 2$):

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}(m\times m)((T\times T)^{-n}(A_1\times A_2)\cap(B_1\times B_2)) = \\
&= \lim_{n\to\infty} m(T^{-n}(A_1)\cap B_1)m(T^{-n}(A_2)\cap B_2) = \\
&= m(A_1)m(B_1)m(A_2)m(B_2) \\
&= (m\times m)(A_1\times A_2)(m\times m)(B_1\times B_2).
\end{aligned}$$

($2 \implies 1$):

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} m(T^{-n}(A)\cap B) = \\
&= \lim_{n\to\infty}(m\times m)((T\times T)^{-n}(A\times X)\cap(B\times X)) = \\
&= (m\times m)(A\times X)(m\times m)(B\times X) = \\
&= m(A)m(B).
\end{aligned}$$

$\square$

Иако је миксирање инваријантно у односу на производ, за ергодичност то не важи у општем случају, што показује следећи контрапример:

Пример 17 *На торусу посматрајмо неконстантну функцију $f(x, y) = x-y$. Лако се проверава да је она инваријантна, односно $f(x+\alpha, y+\alpha) = f(x, y)$, што је контрадикторно услову ергодичности из Става 12.* $\square$

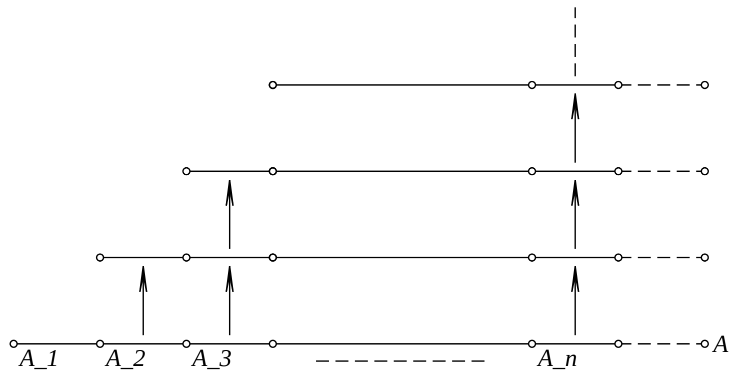
4.4 Кацова лема и Какутани-Рохлинов небодер

Поенкареова теорема говори да се скоро свака тачка подскупа A позитивне мере враћа у A, али не каже колико треба чекати да се то догоди. Време очекивања за мале скупове је велико и обрнуто. Ово даје Кацова[25] лема. У овом поглављу је дата и Какутани-Рохлинова[26] лема према којој се скуп може разбити на произвољно велик "небодер" мерљивих скупова и остатак произвољно мале мере.

Нека је $(X, \mathscr{A}, m)$ вероватносни простор и $T : X \to X$ инвертибилно мерљиво пресликавање које чува меру. Према Поенкареовој теореми, број

$$r_A(x) = inf\{n \geq 1 : T^n(x) \in A\}$$

је дефинисан за скоро свако $x \in A$.



Слика 9: Индукована трансформација T_A

Дефиниција Пресликавање $T_A : A \to A$ дефинисано (скоро свуда) са $T_A(x) = T^{r_A(x)}(x)$ називамо *трансформацијом* индукованом са T на скупу A. □

Са $A_n = \{x \in A : r_A(x) = n\}$, $n \geq 1$, означимо скуп тачака из A које се након тачно n итерација враћају у скуп A. Посматрани скуп се може записати на следећи начин:

$$A_n = A \cap \bigcap_{i=0}^{n-1} T^{-i}(X \setminus A) \cap T^{-n}(A).$$

[25]Marek Kac, пољски математичар

[26]Shizuo Kakutani, јапанско-амерички математичар и Владимир Абрамович Рохлин, руски математичар

Лема 4 *Пресликавање T_A чува меру на простору $(A, \mathscr{A}|_A, m_A)$. Ако је T ергодичко у односу на m, онда је T_A ергодичко у односу на m_A.*

Доказ Коришћена нотација означава следеће:

$$\mathscr{A}|_A = \{B \cap A : B \in \mathscr{A}\},$$

$$m_A(B) = \frac{1}{m(A)} m(B) \text{ за } B \in \mathscr{A}|_A.$$

Ефекат индуковане трансформације T_A је видљив на Какутанијевом небодеру на Слици 9. Вертикалне стрелице показују како дејствује T. Ако је $B \subset A$ мерљив, тада је

$$B = \bigsqcup_{n \geq 1} B \cap A_n$$

$$m_A(B) = \frac{1}{m(A)} \sum_{n=1}^{\infty} m(B \cap A_n).$$

Такође, на A_n је $T_A = T^n$, па је и

$$T_A(B) = \bigsqcup_{n \geq 1} T_A(B \cap A_n) = \bigsqcup_{n \geq 1} T^n(B \cap A_n).$$

Коначно,

$$\begin{aligned} m_A(T_A(B)) &= \frac{1}{m(A)} \sum_{n=1}^{\infty} m(T^n(B \cap A_n)) = \\ &= \frac{1}{m(A)} \sum_{n=1}^{\infty} m(B \cap A_n) = \\ &= m_A(B). \end{aligned}$$

Ако T_A није ергодичко, онда постоји T_A-инваријантан мерљив скуп $B \subset A$ мере $0 < m(B) < m(A)$. Скуп $\bigcup_{n \geq 1} \bigcup_{j=0}^{n-1} T^j(B \cap A_n)$ је нетривијалан T-инваријантан скуп, па T није ергодичко. $\square$

Лема 5 *Нека је $(X, \mathscr{A}, m)$ вероватносни простор, $T : X \to X$ ергодичко пресликавање и $A \in \mathscr{A}$ такво да је $m(A) > 0$. Тада је*

$$\int_A r_A dm = 1.$$

Доказ Како је T ергодичко, скоро свака тачка из X ће посетити A. Дијаграм (на Слици 9) представља скоро цео X. Са дијаграма је видљиво да се свака колона изнад A_n састоји из n скупова, $A_{n,0}, \dots A_{n,n-1}$, при чему је $A_{n,0} = A_n$ и $T^k A_{n,k} = A_n$ за $k = 0, \dots n-1$. Из T-инваријантности следи $m(A_{n,k}) = m(A_n)$ за $k = 0, \dots n-1$. Важи

$$\begin{aligned} 1 = m(X) = \\ &= \sum_{n\geq 1}\sum_{k=0}^{n-1} m(A_{n,k}) = \\ &= \sum_{n\geq 1} n m(A_n) = \\ &= \sum_{n\geq 1}\int\limits_{A_n} r_A dm = \\ &= \int\limits_{A} r_A dm. \end{aligned}$$

$\square$

Лема 6 *Нека је* $(X, \mathscr{A}, m)$ *неатомични вероватносни простор и* $T : X \to X$ *ергодичко пресликавање. Тада, за свако* $n \geq 1$ *и свако* $\varepsilon > 0$ *постоји скуп* $A \in \mathscr{A}$ *са својством да су* $A, T(A), \dots T^{n-1}(A)$ *дисјунктни и*

$$m(\bigsqcup_{i=0}^{n-1} T^i(A)) > 1 - \varepsilon.$$

Доказ Нека је $B \subset X$ мере $m(B) < \frac{\varepsilon}{n}$ (овакав скуп постоји на основу својства неатомичности, $m(\{x\}) = 0$ за свако $x \in X$). Формираћемо Какутанијев небодер. Прецизније, нека је

$$B_k = \{x \in B : r_B(x) = k\} \text{ за } k = 1, 2, \dots \ .$$

Скуп X је једнак (до на скуп мере нула) скупу

$$\bigsqcup_{i=0}^{k-1} T^i(B_k), \text{ за } k = 1, 2, \dots .$$

Да бисмо формирали скуп A, узећемо базу сваке колоне почев од n-те и сваки n-ти спрат исте колоне (до врха небодера). Имамо

$$A = \bigsqcup_{k\geq n}\bigsqcup_{j=0}^{[\frac{k}{n}]-1} T^{jn}(B_k).$$

Дисјунктност скупова је последица конструкције, а мера изостављених спратова је мања од $n \sum_{k \geq 1} m(B_k) \leq nm(B) < \varepsilon$. $\square$

5 Ергодичке мере као екстремалне тачке

Дефиниција Нека је $(X, \mathscr{A}, m)$ вероватносни простор и $T : X \to X$ пресликавање које чува меру. Мера m је *ергодичка* ако за сваки $A \in \mathscr{A}$ који задовољава $T^{-1}A = A$ важи $m(A) = 0$ или $m(A) = 1$. $\square$

Посматрајмо компактан метрички простор X са Бореловом σ-алгебром $\mathscr{B}$, тј. са најмањом σ-алгебром која садржи све отворене подскупове од X. Показује се да је простор реално-вредносних функција дефинисаних на X, у ознаци $\mathscr{C}(X, \mathbb{R})$, са униформном мером сепарабилан Банахов простор(видети [2]).

Нека је $\mathscr{M}(X)$ скуп Борелових вероватносних мера на $(X, \mathscr{B})$.

Рећи ћемо да μ_n слабо конвергира ка μ кад $n \to \infty$ ако за свако $f \in \mathscr{C}(X, \mathbb{R})$ важи $\int f d\mu_n \to \int f d\mu$ кад $n \to \infty$. (Ознаке и услови у наставку важе за цело наведено поглавље).

Лако се проверавају својства скупа $\mathscr{M}(X)$ задата следећом теоремом.

Теорема 6 *Скуп $\mathscr{M}(X)$ је непразан, конвексан и слабо компактан.*

Доказ Конвексност је тривијална. Скуп је непразан јер садржи Дираков меру, а за проверу компактности користи се њој еквивалентна секвенцијална компактност.

Изаберимо густ подскуп $\{f_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathscr{C}(X, \mathbb{R})$ и за задати низ мера $\mu_n \in \mathscr{M}(X)$ посматрајмо ограничен низ $\mu_n(f_1) \in \mathbb{R}$. Он има конвергентан подниз $\mu_n^{(1)}(f_1)$. Поновимо поступак на $\mu_n^{(1)}(f_2) \in \mathbb{R}, \ldots$ На овај начин се за свако $i \geq 1$ добијају угнеждени поднизови $\{\mu_n^{(i)}\} \subset \{\mu_n^{(i-1)}\}$ такви да $\mu_n^{(i)}(f_j)$ конвергира за $1 \leq j \leq i$. Дијагонални низ $\mu_n^{(n)}$ је подниз $\mu_n^{(i)}$ за свако $i \geq 1$. Како је $\{f_i\}$ густ, за свако $\varepsilon > 0$ се може изабрати f_i такво да $\|f - f_i\| \leq \varepsilon$. Такође, $\mu_n^{(n)}(f_i)$ конвергира, па је и Кошијев, односно постоји N тако да за $n, m \geq N$ важи $|\mu_n^{(n)}(f_i) - \mu_m^{(m)}(f_i)| \leq \varepsilon$. Применом $\frac{\varepsilon}{3}$-методе добија се да $\mu_n^{(n)}$ конвергира. Према Рисовој теореми репрезентације, за $\omega(f) = \lim\limits_{n\to\infty}$ постоји мера μ таква да је $\omega(f) = \int f d\mu$. $\square$

Нека је $T : X \to X$ непрекидна трансформација. Очигледно, она је мерљива.

За задату меру μ, може се дефинисати мера $T_*\mu$ са

$$T_*\mu(B) = \mu(T^{-1}B).$$

О T_* се може размишљати као трансформацији $T_* : \mathscr{M}(X) \to \mathscr{M}(X)$,

$$T_*\mu = \mu \circ T^{-1}.$$

Означимо

$$\mathscr{M}(X,T) = \{\mu \in \mathscr{M}(X) : T_*\mu = \mu\}.$$

Према леми на страници 67. у [2], важи еквиваленција:

$$\mu \in \mathscr{M}(X,T) \Leftrightarrow \int f \circ T d\mu = \int f d\mu \text{ за свако } f \in \mathscr{C}(X,\mathbb{R}).$$

Теорема 7 *Скуп $\mathscr{M}(X,T)$ је непразан, конвексан и слабо компактан подскуп скупа $\mathscr{M}(X,T)$.*

Доказ Видети 70. и 71. страницу у [2]. □

Дефиниција Тачка конвексног скупа је *екстремална* ако се не може представити нетривијалном конвексном комбинацијом других елемената скупа. □

На основу следеће теореме (видети доказ у [2]) следи егзистенција ергодичке мере у $\mathscr{M}(X,T)$:

Теорема 8 *Нека је $T : X \to X$ непрекидно пресликавање компактног метричког простора. Тада постоји бар једна ергодичка мера у $M(X,T)$.* □

Коначно, можемо на основу следеће теореме (видети доказ у [2]) закључити да су ергодичке мере екстремалне тачке скупа $\mathscr{M}(X,T)$:

Теорема 9 *Нека је $T : X \to X$ непрекидна трансформација компактног метричког простора X са Бореловом σ-алгебром $\mathscr{B}$. Следеће је еквивалентно:*

1. *T-инваријантна вероватносна мера μ је ергодичка,*
2. *μ је екстремална тачка $\mathscr{M}(X,T)$.*

□

6 Транзитивност ергодичких система

На основу критеријума ергодичности из Става 13, важи следећи став еквидистрибуције.

Став 18 *Нека је* $(X, \mathscr{A}, m)$ *простор коначне мере и* $T : X \to X$ *ергодичко пресликавање. Ако за* $A \in \mathscr{A}$ *важи* $m(A) > 0$*, онда постоји скуп* N_A *мере нула, такав да је*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \chi_A(T^j x) = \frac{m(A)}{m(X)}.$$

$\square$

Ергодичност је својство пресликавања која чувају меру на мерљивом простору, док је транзитивност својство непрекидних пресликавања на тополошком простору. Снабдећемо мерљив простор топологијом и показати да је ергодички систем транзитиван (што је дефинисано у Поглављу 2.2), при одређеним условима.

Став 19 *Нека је* $(X, \mathscr{A}, m)$ *простор коначне мере и* $T : X \to X$ *ергодичко пресликавање. Претпоставимо да је* (X, d) *метрички простор са пребројивом базом отворених скупова и да је сваки отворен скуп мерљив, позитивне мере.*

Тада, постоји скуп $N \subset X$ *мере нула такав да је*

$$\overline{\mathscr{O}^+(x)} = X \text{ за } x \in X \setminus N.$$

Додатно, ако је $T : X \to X$ *непрекидно пресликавање и* (X, d) *комплетан метрички простор, скуп*

$$R^+ = \{x \in X : \overline{\mathscr{O}^+(x)} = X\}$$

је густ у X *и II Берове категорије.*

Доказ 1. Нека је $(V_k)_{k\geq 1}$ пребројива база отворених непразних скупова. Како је $m(V_k) > 0$, на основу става еквидистрибуције, за V_k постоји нула скуп $N_k \subset X$ такав да је $T^j x \in V_k$ за све $x \in X \setminus N_k$ и бесконачно много индекса j. Према томе, $\mathscr{O}^+(x) \cap V_k \neq \emptyset$ за $x \in X \setminus N_k$. Скуп $N = \bigcup_{n\geq 1} N_k$ је мере нула и $\mathscr{O}^+(x) \cap V_k \neq \emptyset$ за све $x \in X \setminus N$ и све $k \geq 1$. Стога, за произвољан отворен непразан скуп важи

$$\mathscr{O}^+(x) \cap V \neq \emptyset \text{ за све } x \in X \setminus N.$$

Додатно, $m(R^+) = m(X)$.

2. Како је T непрекидно, скуп $\mathscr{O}^-(V_k) = \bigcup_{j\geq 1} T^{-j}(V_k)$ је отворен. Као у претходној тачки, налазимо да је $\mathscr{O}^-(V_k)$ густ за свако $k \geq 1$. Применом Берове теореме категорије, закључујемо да је

$$R = \bigcap_{k\geq 1} \mathscr{O}^-(V_k)$$

густ у X и II Берове категорије. За $p \in R$ важи

$$\overline{\mathscr{O}^+(p)} = X$$

(доказ по угледу на Бирхофову теорему транзитивности).
Из $R \subset R^+$, следи $\overline{R^+} = X$. $\square$

7 Фон Нојманова теорема ергодичности

Нека је $(X, \mathscr{A}, m)$ простор коначне мере. Пресликавањем $T : X \to X$ које чува меру је индукован придружени оператор $U_T : L^2 \to L^2$ дефинисан са $U_T(f) = f \circ T$.

Лако се проверава да је U_T изометрија. Наиме, за $f_1, f_2 \in L^2$ је

$$\begin{aligned}\langle U_T f_1, U_T f_2\rangle &= \int f_1 \circ T \cdot \overline{f_2 \circ T} dm = \\ &= \int f_1 \overline{f_2} dm = \\ &= \langle f_1, f_2\rangle\end{aligned}$$

Ако је пресликавање T инвертибилно, њему придружен оператор U_T је унитаран ($U_T^{-1} = U_T^*$) и назива се Копманов[27] оператор.

Својство трансформације која чува меру је спектрално или унитарно ако се може одредити изучавањем придруженог оператора на L^2. На основу става који смо раније доказали, ергодичност је карактерисана својством да су једине T-инваријантне функције константне. Према томе, ергодичност је унитарно својство.

Фон Нојманова[28] теорема, која је наведена у наставку, претходи (у математичком смислу) Биркхофовој теореми ергодичности.

Теорема 10 *Нека је $(X, \mathscr{A}, m)$ простор коначне мере, $T : X \to X$ пресликавање које чува меру и P_T ортогонална пројекција на затворен потпростор $I = \{g \in L^2 : U_T g = g\} \subset L^2$. Тада за свако $f \in L^2$,*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} U_T^i f \to P_T f \text{ у } L^2.$$

Доказ Нека је $B = \{U_T g - g : g \in L^2\}$. Показаћемо да је $B^\perp = I$.

$I \subset B^\perp$: За $f = U_T f$ је $\langle f, U_T g - g\rangle = \langle U_T f, U_T g\rangle - \langle f, g\rangle = 0$.

$B^\perp \subset I$: За $f \in B^\perp$ је $\langle U_T g, f\rangle = \langle g, f\rangle$, за све $g \in L^2$. Стога,

$$\begin{aligned}\|U_T f - f\|^2 &= \langle U_T f - f, U_T f - f\rangle = \\ &= \|U_T f\|^2 - \langle f, U_T f\rangle - \langle U_T f, f\rangle + \|f\|^2 = \\ &= 2\|f\|^2 - \langle U_T^* f, f\rangle - \langle f, U_T^* f\rangle = \\ &= 0.\end{aligned}$$

[27] Bernard Osgood Koopman, француско-амерички математичар

[28] János Lajos Neumann, мађарско-амерички математичар

Следи, $L^2 = I \oplus \overline{B}$, односно свака функција $f \in L^2$ се може записати у виду суме $f = P_T f + h$, за $h \in \overline{B}$. Проверимо да је $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n} U_T^i f \to P_T f$ у L^2, за свако $f \in L^2$.

1. За $f \in I$ тврђење је тривијално.
2. За $f = U_T g - g \in B$ тврђење је последица

$$\begin{aligned}\|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} U_T^i(U_T g - g)\| &= \|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} U_T^{i+1}(g) - U_T^i(g)\| = \\ &= \frac{1}{n}\|\sum_{i=0}^{n-1} U_T^n(g) - g\| \to 0.\end{aligned}$$

3. Нека је $\varepsilon > 0$ и $h \in \overline{B}$. Постоји $h' \in B$такво да је $\|h - h'\| < \varepsilon$. За довољно велико n је $\|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} U_T^i h'\| < \varepsilon$. Коначно,

$$\|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} U_T^i h\| \leq \|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} U_T^i(h - h')\| + \|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} U_T^i h'\| < 2\varepsilon,$$

одакле следи тврђење. □

8 Још о ергодичности и миксирању

Наредни резултат објашњава концепте ергодичности и миксирања у функционалној форми.

Став 20 *Нека је* $(X, \mathscr{A}, m)$ *вероватносни простор и* $T : X \to X$ *пресликавање које чува меру. Еквивалентно је следеће:*

1. T *је ергодично,*

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{i=0}^{n-1} \langle U_T^i f, g\rangle = \langle f, 1\rangle\langle g, 1\rangle$ *за све* $f, g \in L^2$.

Доказ ($2 \implies 1$): На основу карактеризације дате у Ставу 14, довољно је узети $f = \chi_A$, $g = \chi_B$ за мерљиве скупове $A, B \in \mathscr{A}$ и приметити да је $\chi_A \circ T = \chi_{T^{-1}A}$.
($1 \implies 2$): Тврђење важи за карактеристичне функције, па на основу линеарности важи и за просте, а применом теореме о монотоној конвергенцији следи и за интеграбилне функције. □

Став 21 *Нека је* $(X, \mathscr{A}, m)$ *вероватносни простор и* $T : X \to X$ *пресликавање које чува меру. Еквивалентно је следеће:*

1. T *је слабо миксирање,*

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{i=0}^{n-1} |\langle U_T^i f, g\rangle - \langle f, 1\rangle\langle g, 1\rangle| = 0$ *за све* $f, g \in L^2$.

Доказ ($2 \implies 1$): Узети $f = \chi_A$, $g = \chi_B$ за мерљиве скупове $A, B \in \mathscr{A}$.
($1 \implies 2$): Нека је T слабо миксирање. Узмимо $f' = f(x)f(y) \in L^2$, $g' = g(x)g(y) \in L^2$. Према Ставу 17, $T \times T$ је ергодично у односу на меру $m \times m$. На основу карактеризације ергодичности из претходог става имамо да је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \langle U_{T\times T}^i f', g'\rangle = \langle f', 1\rangle\langle g', 1\rangle.$$

Лева страна израза је једнака $\langle U_T f, g\rangle^2$, а десна $\langle f, g\rangle^2$. Како је T и ергодично, важи и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \langle U_T^i f, g\rangle = \langle f, 1\rangle\langle g, 1\rangle.$$

Комбинацијом изведених израза добијамо да је

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}|\langle U_T^i f,g\rangle-\langle f,1\rangle\langle g,1\rangle|=0,$$

што је еквивалентно жељеном, на основу Леме 6. $\square$

Став 22 *Нека је* $(X,\mathscr{A},m)$ *вероватносни простор и* $T:X\to X$ *пресликавање које чува меру. Еквивалентно је следеће:*

1. T *је јако миксирање,*
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\langle U_T^n f,g\rangle=\langle f,1\rangle\langle g,1\rangle$ *за све* $f,g\in L^2$.

Доказ ($2\implies 1$): Узети $f=\chi_A$, $g=\chi_B$ за мерљиве скупове $A,B\in\mathscr{A}$. ($1\implies 2$): За карактеристичне и просте функције лако се проверава.

Нека је ε произвољно. Апроксимирајмо фунцкије f и g простим функцијама: $\|f-f'\|<\varepsilon$ и $\|g-g'\|<\varepsilon$. Имамо

$$\begin{aligned}|\langle U_T^n f,g\rangle-\langle f,1\rangle\langle 1,g\rangle| &\le |\langle U_T^n(f-f'),g\rangle|+|\langle U_T^n f',g'\rangle-\langle f',1\rangle\langle 1,g'\rangle|+\\ &+|\langle U_T^n f',g-g'\rangle|+|\langle f,1\rangle\langle 1,g\rangle-\langle f',1\rangle\langle 1,g'\rangle|\le\\ &\le K\varepsilon+|\langle U_T^n f',g'\rangle-\langle f',1\rangle\langle 1,g'\rangle|,\end{aligned}$$

када се у процени искористи неједнакост Коши-Шварца.

Проласком лимеса кроз неједнакост добија се жељено. $\square$

9 Биркхофова теорема ергодичности

Питање које се поставља је питање статистичке расподеле тачака орбите $\mathscr{O}^+(x)$ у простору X, при пресликавању T које чува меру. Занима нас, за дате $A \in \mathscr{A}$ и $x \in X$, колико често (у просеку) орбита $(T^j x)_{j\geq 0}$ посети скуп A, односно желимо да испитамо конвергенцију суме $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{j=0}^{n-1} \chi_A(T^j x)$ кад $n \to \infty$.

Теорема 11 *Нека је $(X, \mathscr{A}, m)$ коначно-мерљив простор и $T : X \to X$ пресликавање које чува меру. За сваку интеграбилну функцију $f \in L(X, \mathscr{A}, m)$ постоји функција $f^* \in L(X, \mathscr{A}, m)$ и нула скуп $N_f \subset X$ који задовољава $T^{-1}(N_f) = N_f$ и*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{j=0}^{n-1} f(T^j x) = f^*(x)$ *за све* $x \in X \setminus N_f$
2. $f^*(Tx) = f^*(x)$ *за све* $x \in X$,
3. $\int\limits_X f^* = \int\limits_X f$,
4. $\int\limits_X |\frac{1}{n} \sum\limits_{j=0}^{n-1} f(T^j x) - f^*(x)| dm \to 0$, $n \to \infty$.

Доказ Уведимо ознаке

$$S_n(x) = S_n(f, x) = \sum_{j=0}^{n-1} f(T^j x), \text{ за } n \geq 1,$$

$$S_0(x) = 0, \; S_n^+(x) = \max_{0\leq k\leq n} S_k(x).$$

Лема 7 *Нека је $f \in L(X, \mathscr{A}, m)$ и $A_n = \{x \in X : S_n^+(x) > 0\}$. Тада за све $n \geq 1$ важи*

$$\int_{A_n} f dm \geq 0.$$

Доказ Важи

$$f(x) + S_n^+(Tx) \geq S_{k+1}(x) \text{ за } 0 \leq k \leq n,$$

$$f(x) \geq S_n^+(x) - S_n^+(Tx) \text{ за } x \in A_n,$$

одакле је

$$\begin{aligned}\int\limits_{A_n} f(x) &\geq \int\limits_{A_n} S_n^+(x) - \int\limits_{A_n} S_n^+(Tx) = \\ &= \int\limits_{X} S_n^+(x) - \int\limits_{A_n} S_n^+(Tx) \geq \\ &\geq \int\limits_{X} S_n^+(x) - \int\limits_{X} S_n^+(Tx) = \\ &= 0.\end{aligned}$$

□

Лема 8 *Скуп* $Y_{a,b} = \{x \in X : \liminf\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n(x) < a < b < \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n(x)\}$ *је мерљив и инваријантан у односу на* T.

Доказ На основу идентитета

$$\frac{1}{n} S_n(Tx) = \frac{1}{n} S_{n+1}(x) - \frac{1}{n} f(x) = \frac{n+1}{n} \frac{1}{n+1} S_{n+1}(x) - \frac{1}{n} f(x),$$

следи $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n(x) = \liminf\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n(Tx)$ и $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n(x) = \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n(Tx)$, па је $T^{-1}(Y_{a,b}) = Y_{a,b}$ и мерљив. □

Лема 9 *Из услова* $m(X) < \infty$ *следи* $m(Y_{a,b}) = 0$.

Доказ Дефинишимо $g(x) = f(x) - b$ и $A_n = \{x \in Y_{a,b} : S_n^+(g, x) > 0\}$. Функција g је интеграбилна и важи $\int\limits_{A_n} g = \int\limits_{Y_{a,b}} \chi_{A_n} g \geq 0$. На основу дефиниције скупа $Y_{a,b}$ имамо да за свако $x \in Y_{a,b}$ постоји $j \geq 0$ такво да је $\frac{1}{j} S_j(f, x) - b = \frac{1}{j} S_j(g, x) > 0$. Следи, $S_j^+(g, x) > 0$ и свака тачка из $Y_{a,b}$ је садржана у неком A_j, па је $Y_{a,b} = \bigcup\limits_{n\geq 1} A_n$. Приметимо да је $A_n \subset A_{n+1}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \chi_{A_n}(x) = \chi_{Y_{a,b}}(x)$. Према Лебеговој[29] теореми монотоне конвергенције је $\int\limits_{Y_{a,b}} (f-b) \geq 0$. Слично, $\int\limits_{Y_{a,b}} (a-f) \geq 0$. Следи, $m(Y_{a,b}) = 0$.

□

Дефинишимо скупове

$$\begin{aligned} N_f^0 &= \{x \in X : \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n(x) < \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n(x)\}, \\ N_f^1 &= \{x \in X : \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \infty\}. \end{aligned}$$

[29] Henri Léon Lebesgue, француски математичар

Приметимо да је $\int\limits_X |f(T^jx)|dm = \int\limits_X |f|dm$ за $j \geq 0$ због T-инваријантности, па је $\int\limits_X |\frac{1}{n}S_n(x)|dm \leq \int\limits_X |f|dm$. Стога, на основу Фатуове[30] леме биће

$$\begin{aligned}\int\limits_X \lim_{n\to\infty} |\frac{1}{n}S_n(x)|dm &= \int\limits_X \liminf_{n\to\infty} |\frac{1}{n}S_n(x)|dm \leq \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \int\limits_X |\frac{1}{n}S_n(x)|dm \leq \\ &\leq \int\limits_X |f|dm < \infty.\end{aligned}$$

Скуп $N_f = N_f^0 \cup N_f^1$ је мере нула, јер је $m(N_f^0) = m(\bigcup_{a<b,a,b\in\mathbb{Q}} Y_{a,b}) = 0$ и $m(N_f^1) = 0$. Дефинишимо

$$f^*(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}S_n(f,x), & x \notin N_f, \\ 0, & x \in N_f. \end{cases}$$

Провером се утврђује да важе својства 1 и 2 из теореме. Такође, лако се проверава да важе 3 и 4 за специјалан случај, када је f ограничена функција. Из $|f| \leq K$ за $K > 0$, следи $|\frac{1}{n}S_n(x)| \leq K$, одакле на основу Лебегове теореме доминантне конвергенције $\frac{1}{n}S_n(x) \to f^*$ у L^1 и на основу T-инваријантности важи

$$\int\limits_X f = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X \frac{1}{n}S_n(x) = \int\limits_X \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}S_n(x) = \int\limits_X f^*.$$

Генерални случај се доказује апроксимацијом функције $f \in L(X, \mathscr{A}, m)$ функцијама

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x), & |f(x)| \leq N, \\ 0, & |f(x)| > N. \end{cases}$$

Како је $f \in L$ и $f_N(x) = f(x)\chi_{|f|\leq N} \to f(x)$, то на основу Лебегове теореме конвергенције важи $f_N \to f$ у L^1, па је за довољно велико N испуњено $\int |f_N - f| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Притом, лако се проверава неједнакост

[30] Pierre Joseph Louis Fatou, француски математичар

$\int |\frac{1}{n}S_n(f) - \frac{1}{n}S_n(f_N)|dm \leq \int |f_N - f|$. Важи

$$\begin{aligned}\int |\frac{1}{n}S_n(f) - f^*|dm = &\int |\frac{1}{n}S_n(f) - \frac{1}{n}S_n(f_N)|dm+\\ &+\int |\frac{1}{n}S_n(f_N) - f_N^*|dm+\\ &+\int |f_N^* - f^*|dm \leq\\ &\leq (\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}) = \varepsilon, \text{ за довољно велике } n \text{ и } N,\end{aligned}$$

при чему је процена првог сабирка изведена применом Лебегове теореме конвергенције, одакле процена трећег сабирка следи применом Фатуове леме, а процена другог сабирка се добија на основу доказаног специјалног случаја.

Коришћењем L^1 конвергенције имамо $\int f = \int f^*$. □

10 Хопфова[31] теорема ергодичности

Теорема 12 *Нека је T ергодичко пресликавање на $(X, \mathscr{A}, m)$, $f_1, f_2 \in L^1$ и $\int\limits_X f_2 \neq 0$. Тада, за скоро свако $x \in X$ важи*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=0}^{n-1} f_1(T^i x)}{\sum\limits_{i=0}^{n-1} f_2(T^i x)} = \frac{\int\limits_X f_1(x)dm}{\int\limits_X f_2(x)dm}.$$

Доказ Показаћемо да је скоро свуда на скупу $A \in \mathscr{A}$ мере $0 < m(A) < \infty$, уз ознаку $S_n(h) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} h(T^i x)$, испуњено

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n(h)}{S_n(\chi_A)} = \frac{\int\limits_X h(x)dm}{m(A)}$$

и двоструком применом тога (за $h = f_1$ и $h = f_2$) израчунати тражени лимес количника. Конвергенција ће притом важити скоро свуда на X, јер је скуп

$$\{\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=0}^{n-1} h(T^i x)}{\sum\limits_{i=0}^{n-1} \chi_A(T^i x)} = \frac{\int\limits_X h(x)dm}{m(A)}\}$$

T-инваријантан. Притом, као и раније, T_A ће означавати трансформацију индуковану са T на A, а r_A вријеме 1. повратка у скуп A. Како је

$$m(E) = \sum_{j\geq 0} m(A \cap \{r_A > j\} \cap T^{-j}E) \text{ за } E \in \mathscr{A},$$

то је

$$\int\limits_X \chi_E(x)dm = \int\limits_A \sum_{j=0}^{r_A-1} \chi_E(T^j x).$$

Применом својства линеарности интеграла и теореме монотоне конвергенције налазимо да за произвољну функцију $h : X \to [0, \infty)$ важи

$$\int\limits_X hdm = \int\limits_A h_A dm \text{ за } h_A(x) = \sum_{j=0}^{r_A-1} h(T^j x).$$

[31] Heinz Hopf, немачки математичар

Како је T ергодичко пресликавање, то је и T_A ергодичко, према Леми 3, па применом Биркхофове теореме ергодичности на T_A, h_A, имамо да је скоро свуда на A

$$\lim_{m\to\infty} \frac{S_m^A(h_A)}{m} = \frac{\int\limits_A h_A(x)dm}{m(A)} = \frac{\int\limits_X h(x)dm}{m(A)},$$

где је $S_m^A(h_A) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} h_A(T_A^i x)$.

Нека је $r_m = S_m^A(r_A) = \sum\limits_{k=0}^{m-1} r_A \circ T_A^k$ време m. повратка у A.

На A важи $S_n(\chi_A) = m$ за $n \in \{r_{m-1}+1, \dots r_m\}$ и $S_{r_m}(h) = S_m^A(h_A)$. Скоро свуда на A важи

$$\frac{S_m^A(h_A)}{m} = \frac{S_{r_m}(h)}{S_{r_m}(\chi_A)} \text{ за } m \geq 1.$$

Дакле, скоро имамо жељену конвергенцију, тј. она важи дуж подниза $n = r_m$, $m \geq 1$.

Како је $S_n(h)$ неопадајући низ (јер је $h \geq 0$), то је цели посматрани низ конвергентан. Стога,

$$\frac{m-1}{m}\frac{S_{m-1}^A(h_A)}{m-1} \leq \frac{S_n(h)}{S_n(\chi_A)} \leq \frac{S_m^A(h_A)}{m}$$

за $n \in \{r_{m-1}+1, \dots r_m\}$, $m \geq 1$, скоро свуда на A, што је и требало доказати. $\square$

11 Кингманова[32] субадитивна ергодичка теорема

Разматраћемо субадитиван низ функција f_n, односно низ за који важи

$$f_{n+m}(x) \leq f_n(x) + f_m(T^n x) \text{ за } n, m \geq 1.$$

Теорема 13 *Нека је* $(X, \mathscr{A}, m)$ *вероватносни простор и* $T : X \to X$ *пресликавање које чува меру. Нека је* $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *низ мерљивих функција који је субадитиван и задовољава* $\inf\limits_{n \geq 1} \frac{1}{n} \int\limits_X f_n dm(x) > 0$*. Тада, постоји интеграбилна скоро свуда* T*-инваријантна функција* $\bar{f}$ *таква да је*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f_n(x)}{n} = \bar{f}(x) \text{ за скоро свако } x \in X.$$

Штавише, за све T*-инваријантне мерљиве скупове* A *важи*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \int\limits_A f_n(x) dm(x) = \int\limits_A \overline{f}(x) dm(x).$$

Доказ За доказ теореме ће нам бити потребна наредна Фекетеова[33] лема:

Лема 10 *Нека је* a_n *субадитиван низ ненегативних реалних бројева. Тада,*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n \geq 1} \frac{a_n}{n}.$$

Доказ За задато $\varepsilon > 0$ изаберимо M такво да

$$\frac{a_M}{M} \leq \inf_{n \geq 1} \frac{a_n}{n} + \varepsilon.$$

Важи $n = k_n M + r_n$ за $0 \leq r_n < M$, при чему $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{k_n}{n} = \frac{1}{M}$. За довољно велико n, применом субадитивности имамо

$$\inf_{n \geq 1} \frac{a_n}{n} \leq \frac{a_n}{n} = \frac{a_{k_n M + r_n}}{n} \leq \frac{1}{n}(k_n a_M + a_{r_n}) \leq (\frac{a_M}{M} + \varepsilon) \leq \inf_{n \geq 1} \frac{a_n}{n} + 2\varepsilon.$$

□

[32] Sir John Frank Charles Kingman, британски математичар

[33] Michael Fekete, израелско-мађарски математичар

На основу претходне леме следи да је за мерљив T-инваријантан скуп A
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int\limits_A f_n(x)dm(x)=\int\limits_A \overline{f}(x)dm.$$
За $X=A$ ову вредност ћемо означити са $\gamma(f)$. Наредна лема је позната као Рисова[34] комбинаторна лема:

Лема 11 *Члан c_i је „вођа" коначног низа $c_0, c_1, \ldots c_{n-1}$ ако је нека од сума c_i, c_i+c_{i+1}, $\ldots$ $c_i+\cdots+c_{n-1}$ негативна. Сума „вођа" је 0 или негативна.*

Доказ Индукцијом.

За $n=1$ се лако проверава тврђење разматрањем случајева $c_0\geq 0$ (када је сума „вођа" празна и једнака нули) и $c_0<0$ (када је сума „вођа" једнака c_0).

Докажимо сада индуктивни корак. Претпоставимо да тврђење важи за све бројеве мање од n. Разликују се два случаја:

1. c_0 није „вођа": Вође су међу $c_1, \ldots c_{n-1}$, па тврђење следи применом индуктивне хипотезе.

2. c_0 је „вођа": Изаберимо минимално k за које $c_0+\cdots+c_k<0$. Тада, сваки c_i за $i\leq k$ је „вођа" (иначе би за неко i важило $c_i+\cdots+c_k\geq 0$, а због минималности је $c_0+\cdots+c_{i-1}\geq 0$. Контрадикција). Број преосталих „вођа" је максимално $n-k$, па се може применити индуктивна хипотеза. □

Лема 12 $\liminf\limits_{n\to\infty}\frac{f_n(x)}{n}$ *и* $\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{f_n(x)}{n}$ *су скоро свуда T-инваријантне функције.*

Доказ Из субадитивности
$$f_n(Tx)\geq f_{n+1}(x)-f_1(x)$$
следи
$$\liminf_{n\to\infty}\frac{f_n(x)}{n}\geq\liminf_{n\to\infty}\frac{f_n(Tx)}{n}\ \text{ и }\ \limsup_{n\to\infty}\frac{f_n(Tx)}{n}\geq\limsup_{n\to\infty}\frac{f_n(x)}{n}.$$
Због T-инваријантности је
$$\int\limits_X[\limsup_{n\to\infty}\frac{f_n(Tx)}{n}-\limsup_{n\to\infty}\frac{f_n(x)}{n}]dm=0,$$

[34] Frigyes Riesz, мађарски математичар

а интегранд је ненегативан, па је

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{f_n(Tx)}{n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{f_n(x)}{n} \text{ за скоро свако } x \in X.$$

Аналогно се доказује за $\liminf\limits_{n\to\infty}$. $\square$

Лема 13 *Нека је* $B = \{x : \liminf\limits_{n\to\infty} \frac{f_n(x)}{n} < 0\}$. *Тада је*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int\limits_B f_n(x) dm \leq 0.$$

Доказ Нека је, за $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \Psi_n = &\ \{x : \inf_{1\leq k\leq n} f_n(x) - f_{n-k}(T^x) < 0\}, \\ A_n = &\ \qquad \{x : \inf_{1\leq k\leq n} f_k(x) < 0\} \subset \Psi_n. \end{aligned}$$

Важи $A_n \subset A_{n+1}$ и $B \subset \bigcup\limits_{n\geq 1} A_n$. Означимо

$$a_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(Tx).$$

Како је

$$f_n(x) - f_{n-k}(T^k x) = a_n(x) + \cdots + a_{n-k+1}(T^{k-1}x) \text{ и } f_0(x) = 0,$$

то је

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k}(T^k x).$$

Према дефиницији скупа Ψ_n биће $T^k x \in \Psi_n$ ако постоји j, $k \leq j \leq n-1$ за који је $a_{n-k}(T^k x) + \cdots + a_{n-j}(T^j x) < 0$.
Применом Рисове комбинаторне леме на $c_k = a_{n-k}(T^k x)$ добија се

$$\sum_{0\leq k\leq n-1, T^k x\in\Psi_{n-k}} a_{n-k}(T^k x) \leq 0.$$

Из инваријантности m и T имамо

$$\begin{aligned}
0 &\geq \int\limits_B \sum_{0\leq k\leq n-1, T^k x\in\Psi_{n-k}} a_{n-k}(T^k x)dm = \\
&= \sum_{0\leq k\leq n-1, T^k x\in\Psi_{n-k}} \int\limits_{B\cap T^{-k}\Psi_{n-k}} a_{n-k}(T^k x)dm = \\
&= \sum_{0\leq k\leq n-1, T^k x\in\Psi_{n-k}} \int\limits_{T^k B\cap\Psi_{n-k}} a_{n-k}(T^k x)dm = \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{B\cap\Psi_i} a_i(x)dm.
\end{aligned}$$

Због T-инваријантности је и

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\int\limits_B f_n(x)dm &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_B a_i(x)dm = \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{B\cap\Psi_i} a_i(x)dm + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{B\setminus(B\cap\Psi_i)} a_i(x)dm \leq \\
&\leq 0 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{B\setminus(B\cap A_i)} f_1^+(x)dm,
\end{aligned}$$

где је коришћено $a_j(x) \leq f_1(x) \leq f_1^+(x) = max\{0, f_1(x)\}$. Применом $\limsup\limits_{n\to\infty}$ добија се

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int\limits_B f_n(x)dm \leq 0.$$

B је инваријантан, па је $\lim\limits_{n\to\infty} = \limsup\limits_{n\to\infty}$. □

Лема 14 *Нека је* $B = \{x : \liminf\limits_{n\to\infty}\frac{f_n(x)}{n} < \lambda\}$. *Тада је*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int\limits_B f_n(x)dm \leq \lambda m(B).$$

Доказ Применом претходне леме на $f_n(x) - n\lambda$. □

Низ b_n дефинисан са $b_n(x) = f_n(x) - \sum\limits_{i=0}^{n-1} f_1(T^i x)$ је субадитиван и непозитиван. Показаћемо да је скуп

$$B = \{x : \limsup_{n\to\infty} \frac{b_n(x)}{n} - \liminf_{n\to\infty} \frac{b_n(x)}{n} > \alpha\}$$

мере 0 за произвољно α, а како на основу Бирхофове теореме низ $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} f_1(T^i x)$ конвергира скоро свуда, то ће и низ $\frac{f_n(x)}{n}$ конвергирати скоро свуда.
За задато $\varepsilon > 0$ постоји M такво да

$$\frac{1}{m}\int\limits_X b_m \leq \gamma(b) + \varepsilon \text{ за све } m > M.$$

Важи

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{b_{nM}(x)}{nM} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{b_n(x)}{n} \text{ и } \liminf_{n\to\infty} \frac{b_{nM}(x)}{nM} \geq \liminf_{n\to\infty} \frac{b_n(x)}{n},$$

јер је Mn подниз низа n. Како је b_n субадитиван и непозитиван, то је за све $0 \leq k < M$ испуњено

$$\begin{aligned} b_{(n+1)M}(x) &\leq b_{nM+k}(x) + b_{M-k}(T^{nM+k}x) \leq \\ &\leq b_{nM+k}(x) \leq \\ &\leq b_{nM}(x) + b_k(T^{nM}x) \leq \\ &\leq b_{nM}(x), \end{aligned}$$

па је

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{b_{nM}(x)}{nM} = \limsup_{n\to\infty} \frac{b_n(x)}{n} \text{ и } \liminf_{n\to\infty} \frac{b_{nM}(x)}{nM} = \liminf_{n\to\infty} \frac{b_n(x)}{n}.$$

Низ $b_n^M(x) = b_{nM}(x) - \sum\limits_{i=0}^{n-1} b_M(T^{Mi}x)$ је субадитиван и непозитиван и

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{b_n(x)}{n} - \liminf_{n\to\infty} \frac{b_n(x)}{n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{b_{nM}(x)}{nM} - \liminf_{n\to\infty} \frac{b_{nM}(x)}{nM} \leq -\liminf_{n\to\infty} \frac{b_n^M}{nM}.$$

Нека је

$$E = \{x : \liminf_{n\to\infty} \frac{b_n^M(x)}{n} < -M\alpha\}.$$

Важи $B \subset E$. Имамо

$$0 \geq \gamma(b^M) = M\gamma(b) - \int\limits_X b_M(x)dm(x) \geq -M\varepsilon.$$

Из Леме 14 следи

$$-M\alpha m(E) \geq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int\limits_E b_n^M \geq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int\limits_X b_n^M \geq -M\varepsilon,$$

одакле је

$$m(E) \leq \frac{\varepsilon}{\alpha}.$$

Због произвољности ε следи тврђење. Лимес је скоро свуда T-инваријантан и интеграбилан на основу Фатуове леме. $\square$

12 Докази ергодичности

12.1 Примена Фуријеових редова

Нека је $X = \mathbb{T}^k = \mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$, m Лебегова мера и A целобројна инвертибилна матрица. Дефинишимо

$$T((x_1, \dots x_k) + \mathbb{Z}^k) = A(x_1, \dots x_k) + \mathbb{Z}^k.$$

Став 23 *Линеарни торални ендоморфизам T је ергодички у односу на m акко A нема сопствених вредности које су корени јединице.*

Доказ Претпоставимо да је T ергодичко и A има p-ти корен јединице за сопствену вредност (нека је p минималан такав). Тада, A^p има 1 за сопствену вредност, па је $n(A^p - I) = 0$ за неки ненула вектор n. Функција $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{p-1} e^{2\pi i n \cdot A^i x}$ је T-инваријантна, мерљива, па је константна, одакле следи $n = 0$.

За другу импликацију посматрајмо T-инваријантну функцију f. Како је $fT^p = f$ скоро свуда, то је

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^k} c_n e^{2\pi i \langle nA^p, x\rangle} = \sum_{n \in \mathbb{Z}^k} c_n e^{2\pi i \langle n, x\rangle}.$$

Имамо да су за свако $n \in \mathbb{Z}^k$ Фуријеови коефицијенти облика $c_n = c_{nA} = \cdots = c_{nA^p} = \dots$, па применом Риман-Лебегове леме имамо да је $nA^q = n$ за неко $q > 0$. Како A нема корене јединице за сопствене вредности, следи $n = 0$, па је f константно скоро свуда, чиме је ергодичност доказана. □

Пример 18 *Одавде следи да је раније посматрани, Аносовљев дифеоморфизам (из Примера 3 на 9. страници), такође ергодички.* □

Пример 19 *Раније смо видели да ригидне ротације чувају меру. Рационалне ротације нису ергодичке, а ирационалне ротације јесу, што се лако проверава коришћењем доказаних критеријума ергодичности.*

1. $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$: Важи $\varphi^q = id_{\mathbb{S}^1}$. Нека је $A \subset \mathbb{S}^1$ скуп мере $m(A) \in (0, \frac{1}{q})$. Скуп $B = \bigcup\limits_{i=0}^{q-1} \varphi^i(A)$ је φ-инваријантан, мере $m(B) \in (0, 1)$.

2. $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: $f(e^{2\pi ix}) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} f_k e^{2\pi ikx}$, $f(\varphi(e^{2\pi ix})) = f(e^{2\pi ik(x+\alpha)}) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} f_k e^{2\pi ik(x+\alpha)}$. Ако је f φ-инваријантно, на основу јединствености Фуријеових коефицијената следи: $f_k = e^{2\pi ik\alpha} f_k$ за $k \in \mathbb{Z}$. Због ирационалности α мора бити $f_k = 0$ за $k \neq 0$, односно f је скоро свуда константно. $\square$

Пример 20 *Пресликавање*

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ z &\to z^2 \end{aligned}$$

је ергодичко.

Нека је $f \in L(\mathbb{S}^1)$ и означимо $g(z) = f(z^2)$, $F(x) = f(e^{2\pi ix})$, $G(x) = g(e^{2\pi ix}) = F(2x)$. Приметимо $F(x+1) = F(x)$ за $x \in \mathbb{R}$. За Фуријеове[35] коефицијенте важи

$$\begin{aligned} g_{2k} &= \int\limits_0^1 G(x) e^{-2\pi i2kx} dx = \\ &= \int\limits_0^1 F(2x) e^{-2\pi i2kx} dx = \\ &= \int\limits_0^{\frac{1}{2}} F(2x) e^{-2\pi i2kx} dx + \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 F(2x-1) e^{-2\pi i2kx} dx = \\ &= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 F(y) e^{-2\pi iky} dy + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 F(y) e^{-2\pi iky} dy = \\ &= \int\limits_0^1 F(y) e^{-2\pi iky} dy = \\ &= f_k. \end{aligned}$$

Ако је f инваријантна у односу на ϕ, онда $G(x) = F(x)$, па је $g_k = f_k$, одакле је $f_k = f_{2k} = \cdots = f_{2^n k} = \ldots$ за $k \in \mathbb{Z}$. Према Риман-Лебеговој леми, $\lim\limits_{|k|\to\infty} f_k = 0$, односно $f_k = 0$ за све $k \neq 0$. Функција F је константна скоро свуда, па је ϕ ергодичко. $\square$

[35] Jean-Baptiste Joseph Fourier, француски математичар

Пример 21 *Нека је* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. *Пресликавање* $S : \mathbb{T}^k \to \mathbb{T}^k$ *дефинисано са*

$$S : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ . \\ x_k \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x_1 + \alpha \\ x_2 + x_1 \\ x_3 + x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_k + x_{k-1} \end{bmatrix}$$

је ергодичко.

Нека S-инваријантна фунција f има Фуријеов развој

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^k} c_n e^{2\pi i \langle n, x \rangle}.$$

Тада, $f(x) = f(Sx)$, па имамо

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^k} c_n e^{2\pi i \langle n, Sx \rangle} = \sum_{n \in \mathbb{Z}^k} c_n e^{2\pi i n_1 \alpha} e^{2\pi i \langle S' n, x \rangle},$$

где је

$$S' : \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ . \\ . \\ . \\ n_{k-1} \\ n_k \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} n_1 + n_2 \\ n_2 + n_3 \\ . \\ . \\ . \\ n_{k-1} + n_k \\ n_k \end{bmatrix}.$$

Из јединствености Фуријеових коефицијената следи $c_{S'n} = e^{2\pi i \alpha n_1} c_n$. Стога, за свако $n \in \mathbb{Z}^k$ сви $n, S'n, (S')^2 n, \ldots$ су различити (и тада је $c_n = 0$) или $(S')^p n = (S')^q n$ за неко $p > q$ (одакле је $n_2 = n_3 = \cdots = n_k = 0$). За $n = (n_1, 0, \ldots 0)$ се добија $c_n = e^{2\pi i n_1 \alpha} c_n$, па је $n_1 = 0$ или $c_n = 0$. Како је f константно пресликавање, на основу Става 12, S је ергодичко. $\square$

12.2 Примена теореме Хан-Колмогорова

Хан-Колмогоровљева[36] теорема екстензије се користи у доказима ергодичности трансформације.

Теорема 14 *Нека је $\mathscr{A}$ алгебра подскупова од X и $\mathscr{B}(\mathscr{A})$ сигма-алгебра генерисана са $\mathscr{A}$. Нека $\mu : \mathscr{A} \to [0,1]$ задовољава:*

1. $\mu(\emptyset) = 0$

2. *Ако су $A_n \in \mathscr{A}$, $n \geq 1$ дисјунктни по паровима и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}$, онда $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.*

Тада постоји јединствена вероватносна мера $\mu : \mathscr{B}(\mathscr{A}) \to [0,1]$ која је продужење мере $\mu : \mathscr{A} \to [0,1]$. □

Кључна је следећа техничка лема у доказивању ергодичности:

Лема 15 *Нека је $(X, \mathscr{A}, m)$ коначно-мерљив простор, $m(X) = 1$ и $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ алгебра која генерише $\mathscr{A}$. Нека је $A \in \mathscr{A}$ и претпоставимо да постоји $K > 0$ такво да $m(A)m(I) \leq Km(A \cap I)$ за све $I \in \mathscr{B}$. Тада је $m(A) = 0$ или $m(A) = 1$.*

Доказ Нека је $\varepsilon > 0$ и $I \in \mathscr{B}$ такво да је $m((X \setminus A) \triangle I) < \varepsilon$. Следи, $|m(X \setminus A) - m(I)| < \varepsilon$, а због $A \cap I \subset (X \setminus A) \triangle I$ и $|m(A) - m(I)| < \varepsilon$. Како је

$$\begin{aligned} m(A)m(X \setminus A) &\leq m(A)(m(I) + \varepsilon) \leq \\ &\leq Km(A \cap I) + m(A)\varepsilon \leq \\ &\leq Km(A \cap I) + \varepsilon \leq \\ &\leq (K+1)\varepsilon, \end{aligned}$$

следи $m(A) = 0$ или $m(A) = 1$. □

Пример 22 *Пресликавање $T : [0.1] \to [0,1]$*

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2x, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

(из Примера 4 на 13. страници) је ергодичко.

[36]Hans Hahn, аустријски математичар и Андрей Николаевич Колмогоров, руски математичар

Видели смо да пресликавање чува Лебегову меру. Дефинишимо интервале $I(0) = [0, \frac{1}{2}]$, $I(1) = [\frac{1}{2}, 1]$ и функције

$$\begin{aligned} \phi_0 : [0,1] &\to I(0) \\ x &\to \frac{x}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_1 : [0,1] &\to I(1) \\ x &\to 1 - \frac{x}{2} \end{aligned}$$

Приметимо $T\phi_0(x) = x$, $T\phi_1(x) = x$.

За $i_0, \dots i_{n-1} \in \{0,1\}$ дефинишимо $\phi_{i_0,\dots i_{n-1}} = \phi_{i_0} \cdots \phi_{i_{n-1}}$ и приметимо $T^n\phi_{i_0,\dots i_{n-1}}(x) = x$, за све $x \in [0,1]$.

Цилиндри ранга n су облика $I(i_0, \dots i_{n-1}) = \phi_{i_0,\dots i_{n-1}}([0,1])$ и алгебра њихових коначних унија генерише Борелову σ-алгебру.

Нека је A мерљив, T-инваријантан скуп. Тада је $T^{-n}A = A$, као и $m(I) = \frac{1}{2^n}$ (применом правила извода сложене функције).

Са $\phi = \phi_{i_0,\dots i_{n-1}}$ означимо функцију на n-цилиндру. Приметимо $T^n\phi(x) = x$.

Имамо

$$\begin{aligned} m(A \cap I) &= \int \chi_{A\cap I}(x)dx = \\ &= \int_I \chi_A(x)dx = \\ &= \int_I \chi_A(\phi(x))|\phi'(x)|dx = \\ &= \int_I \chi_{T^{-n}A}(\phi(x))|\phi'(x)|dx = \\ &= \int_I \chi_{T^{-n}A}(\phi(x))|\phi'(x)|dx = \\ &= \int_I \chi_A(T^n\phi(x))|\phi'(x)|dx = \\ &= \int_I \chi_A(x)|\phi'(x)|dx = \\ &= \frac{1}{2^n}\int_I \chi_A(x)dx = \end{aligned}$$

$$= \quad m(I)m(A),$$

одакле следи ергодичност пресликавања T. $\square$

Пример 23 *Гаусово пресликавање* $T : [0,1] \to [0,1]$

$$T(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

(из Примера 8 на 21. страници) је ергодичко.

Видели смо да пресликавање чува Лебегову меру. Биће нам потребна нека знања о верижним разломцима. Ако x има представљање у облику

$$x = \frac{1}{x_0 + \frac{1}{x_1 + \frac{1}{x_2 + \dots}}},$$

што ћемо записивати са $[x_0, x_1, x_2, \dots]$, онда $T(x)$ има представљање облика $[x_1, x_2, \dots]$.
Нека је $x \in (0,1)$ ирационалан број са представљањем у облику верижних разломака, $[x_0, x_1, \dots]$. За $t \in [0,1]$ запишимо

$$[x_0, x_1, \dots, x_{n-1} + t] = \frac{P_n(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}; t)}{Q_n(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}; t)},$$

где су P_n и Q_n полиноми по x_0, x_1, $\dots$ x_{n-1} и t. Важи следећа лема:

Лема 16 *1. Имамо*

$$P_n(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}; t) = P_n + tP_{n-1},$$

$$Q_n(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}; t) = Q_n + tQ_{n-1}$$

и важе рекурентне формуле

$$P_{n+1} = x_n P_n + P_{n-1}, Q_{n+1} = x_n Q_n + Q_{n-1}$$

са почетним условима

$$P_0 = 0, P_1 = 1, Q_0 = 1, Q_1 = x_0.$$

2. Важи идентитет

$$Q_n P_{n-1} - Q_{n-1} P_n = (-1)^n.$$

Доказ 1. За $n \leq 1$ тврђење важи. Нека је $n \geq 2$, користићемо индукцију по n. Како је $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = [x_0, \dots x_{n+1}] = [x_0, \dots x_{n-1}, x_n + \frac{1}{x_{n+1}}]$. Према индукцијској претпоставци за n, следи тврђење.

2. Индукцијом се лако доказује. $\square$

Нека су $i_0, i_1, \dots i_{n-1} \in \mathbb{N}$. Цилиндар је интервал,

$$I(i_0, i_1, \dots i_{n-1}) = \{[i_0, i_1, \dots i_{n-1} + t] : t \in [0, 1)\},$$

а нека је $\mathscr{A}$ алгебра коначних унија цилиндара.

За свако $i \in \mathbb{N}$ дефинишимо пресликавање $\phi_i : [0, 1) \to I(i)$ са

$$\phi_i(x) = \frac{1}{i + x}.$$

Дакле, ако x има представљање облика $[x_0, x_1, \dots]$, онда $\phi_i(x)$ има представљање облика $[i, x_0, x_1, \dots]$. Даље ознаке су као у претходном примеру.

Приметимо да је

$$\phi_{i_0,i_1,\dots i_{n-1}}(t) = \frac{P_n + tP_{n-1}}{Q_n + tQ_{n-1}} \text{ и } |\phi'_{i_0,i_1,\dots i_{n-1}}(t)| = \frac{1}{(Q_n + tQ_{n-1})^2}.$$

Имамо да је $Q_n + Q_{n-1} \leq 2Q_n$, одакле се добија да $|\phi'_{i_0,i_1,\dots i_{n-1}}|$ има доњу границу $\frac{1}{4Q_n^2}$ и горњу границу $\frac{1}{Q_n^2}$.

Следи,

$$\mu(B \cap I(i_0, i_1, \dots i_{n-1})) \leq \frac{\mu(B)}{4Q_n^2} \leq \frac{\mu(B)\mu(I(i_0, i_1 \dots i_{n-1}))}{4},$$

одакле се добија да је T ергодичко. $\square$

Пример 24 *Лиротово пресликавање* $T : [0, 1] \to [0, 1]$

$$T(x) = \begin{cases} n(n+1)x - n, & x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

(из Примера 11 на 27. страници) је ергодичко.

Видели смо да пресликавање чува Лебегову меру. Дефинишимо $I(n) = [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ за $n \geq 1$ и функције

$$\begin{aligned} \phi_n : I &\to I(n) \\ x &\to \frac{x+n}{n(n+1)} \end{aligned}$$

Приметимо $T\phi_n(x) = x$, за $x \in [0,1]$.

За $i_0, \dots i_{n-1} \in \{0,1\}$ дефинишимо $\phi_{i_0,\dots i_{n-1}} = \phi_{i_0} \cdots \phi_{i_{n-1}}$ и приметимо $T^n \phi_{i_0,\dots i_{n-1}}(x) = x$ за све $x \in [0,1]$.

Цилиндри ранга n су облика $I(i_0, \dots i_{n-1}) = \phi_{i_0,\dots i_{n-1}}([0,1])$ и алгебра њихових коначних унија генерише Борелову σ-алгебру.

Нека је A мерљив, T-инваријантан скуп, а са $\phi = \phi_{i_0,\dots i_{n-1}}$ означимо функцију на n-цилиндру I. Приметимо $T^{-n}A = A$, $T^n\phi(x) = x$, као и $m(I) = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{1}{i_j(i_j+1)} = \phi'(x)$ (применом правила извода сложене функције).

Имамо

$$\begin{aligned}
m(A \cap I) &= \int \chi_{A\cap I}(x)dx = \\
&= \int_I \chi_A(x)dx = \\
&= \int_I \chi_A(\phi(x))|\phi'(x)|dx = \\
&= \int_I \chi_{T^{-n}A}(\phi(x))|\phi'(x)|dx = \\
&= \int_I \chi_{T^{-n}A}(\phi(x))|\phi'(x)|dx = \\
&= \int_I \chi_A(T^n\phi(x))|\phi'(x)|dx = \\
&= \int_I \chi_A(x)|\phi'(x)|dx = \\
&= m(I)m(A),
\end{aligned}$$

одакле следи ергодичност пресликавања T. $\square$

13 Ентропија

13.1 Дефиниције и својства

За ергодичност и миксирање кажемо да су *спектралне инваријанте* (у вези су са дејством оператора T на $L^2(\mu)$, видети [3]).

Међутим, различити оператори могу имати исто дејство на $L^2(\mu)$, па их не можемо разликовати на овај начин. Да би то било могуће потребна нам је друга врста инваријанте, финија (у смислу да не зависи само од спектралних својстава).

У питању је *ентропија*, коју је у вези са теоријом информација први пут изучавао Клод Шенон[37]. Мотивација му је био једноставан пример, посматрао је извор који производи двострани низ симбола из азбуке $\{a_1, a_2, \dots a_n\}$. Притом, вероватноћа пријема симбола a_i је била једнака p_i и пријеми симбола су били међусобно независни, уз услов $\sum\limits_i p_i = 1$.

У ергодичкој теорији овај процес ћемо интерпретирати као динамички систем, где је $X = \{a_1, a_2, \dots a_n\}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{B}$ је σ-алгебра генерисана цилиндрима $\{x \in X : x_{i_1} = a_{i_1}, \dots x_{i_n} = a_{i_n}\}$, μ је мера производа која свакој координати додељује вероватноћу и T је померање улево.

Ентропија нам је потребна као *мера хаотичности и компликованости система.* У наставку дајемо њену дефиницију и нека основна својства, а заинтересовани читалац може сазнати више из [12].

Дефиниција За партицију $\mathscr{P} = \{P_1, \dots P_k\}$ и меру μ дефинише се

$$H_\mu(\mathscr{P}) = H(\mu(P_1), \dots \mu(P_k)) = -\sum_{i=1}^{k} \mu(P_i) \log\left(\mu(P_i)\right).$$

□

За $x \in X$ нека је $m(\mathscr{P}, x)$ мера елемента $\mathscr{P}$ који садржи x. Тада,

$$H(\mathscr{P}) = -\int_X \log m(x, \mathscr{P}) d\mu.$$

За две различите партиције $\mathscr{P}_1 = \{A_i\}_i$ и $\mathscr{P}_2 = \{B_j\}_j$ формира се $\mathscr{P}_1 \vee \mathscr{P}_2 = \{A_i \cap B_j\}_{i,j}$. Условну ентропију партиције $\mathscr{P}_1$ у односу на партицију $\mathscr{P}_2$ дефинишемо као

$$H(\mathscr{P}_1|\mathscr{P}_2) = \sum_{j\in J} \mu(B_j) \sum_{i\in I} \mu(A_i|B_j) \log \mu(A_i|B_j),$$

[37] Claude Shannon, енглески математичар

где је условна мера дефинисана као $\mu(A|B) = \frac{\mu(A\cap B)}{\mu(B)}$. Ако је $\mathscr{P}_2 = \{X\}$, онда је $H(\mathscr{P}_1|\mathscr{P}_2) = H(\mathscr{P}_1)$.

Став 24 *Нека су $\mathscr{P}_1$ и $\mathscr{P}_2$ коначне партиције. Тада,*

1. $H(\mathscr{P}_1) \geq 0$.
2. *Ако је $\mathscr{P}_1 \leq \mathscr{P}_2$, онда је $H(\mathscr{P}_1) \leq H(\mathscr{P}_2)$.*
3. *Ако $\mathscr{P}_1$ има n елемената, онда је $H(\mathscr{P}_1) \leq \log n$ и једнакост важи акко сваки елемент партиције има меру $\frac{1}{n}$.*
4. $H(\mathscr{P}_1 \vee \mathscr{P}_2) \leq H(\mathscr{P}_1) + H(\mathscr{P}_2)$.

Доказ Доказаћемо 3. својство, преостала својства следе на основу објашњених својстава ентропије.

Функција $f(x) = -x\log x$ је строго конвексна, па на основу Јенсенове неједнакости имамо

$$-\log n = -\log\left(\sum_{i=1}^{n}\mu(P_i)\frac{1}{(\mu(P_i))}\right) \leq -\sum_{i=1}^{n}\mu(P_i)\log\left(\frac{1}{\mu(P_i)}\right) = -H(A).$$

$\square$

Ентропију h трансформације T у односу на $\mathscr{P}$, у ознаци $h(\mathscr{P}, T)$, дефинишемо као

$$h(\mathscr{P}, T) \overset{\text{деф.}}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H(\mathscr{P} \vee T^{-1}\mathscr{P} \vee \cdots \vee T^{-n+1}\mathscr{P}).$$

Дефиниција је коректна на основу својства субадитивности низа и Фекетеове леме.
Коначно, ентропија трансформације T је задата са

$$h(T) \overset{\text{деф.}}{=} \sup_{\mathscr{P}} h(\mathscr{P}, T).$$

13.2 Израчунавања

Израчунавање ентропије на основу дефиниције није лако јер се супремум узима по свим коначним партицијама. Међутим, израчунавање је могуће за партицију која задовољава $h(\mathscr{P}, T) = h(T)$.

Пример 25 *Ентропија кружне ротације је* 0.

Ентропија је мера везане, међусобне енергије честица која се не може претворити у рад. Код ригидне ротације атоми и молекули могу мало да осцилују око равнотежног положаја, па је ентропија мала. Код течности је ентропија већа, а највећа је код гасова. $\square$

14 Ергодичност у механици

Класични динамички систем (M, μ, ψ_t) се састоји из глатке многострукости M мере μ на M, с непрекидном позитивном кривином и једнопараметарском групом ψ_t дифеоморфизама многострукости M, који чувају меру ($\mu(A) = \mu(\psi_t A)$ за све t и све мерљиве A).

Позната чињеница из глобалне анализе је да Хамилтонов ток чува меру (Видети теорему Лиувила у [8]) и да је Хамилтонијан први интеграл одговарајућег система једначина (из [8]), што одговара закону физике о очувању енергије.

Какав мора бити систем који посматрамо да бисмо га уопште могли назвати ергодичним?

Наиме, јасно је да систем најпре мора испунити поменути услов очувања енергије, односно енергија се у овом случају нити генерише нити троши. Ово ћемо објаснити на примеру ергодичне атмосфере.

Раније смо говорили о случају ергодичности атмосфере код проблема лета путничког авиона. Речено је да је потребно задовољити неке услове у погледу самих параметара атмосфере, а то су: густина атмосфере на разматраној путањи лета авиона (односно, константност висине лета јер се густина мења са висином), притисак (који је функција густине атмосфере у одређеној тачки и тенденције њене промене у околним тачкама), састав атмосфере у околини посматране тачке (односно, концентрација одређених врста атома и молекула који улазе у њен састав), температура атмосфере у посматраној тачки, као и тенденције њених промена у околини поменуте тачке.

Имајући у виду раније побројане параметре атмосфере који утичу на ергодичност, може се закључити да је неопходно да промене тих параметара буду веома мале, како не би дошло до стварања нити губљења енергије. Значи, неке од ситуација које се не дешавају у ергодичном систему су: пожар, експлозија у некој тачки атмосфере (ракета, пројектил).

Поменути узроци или мењају састав атмосфере или генеришу гасове тј. генерише се енергија и мења њена расподела у околној средини. Овде се може приметити да важи и закон одржања материје, јер је састав ергодичног процеса скоро константан (у супротном долази до хемијске реакције и мења се концентрација).

15 Примене

15.1 Теоријске примене

Пример 26 *Нека су X и Y метрички простори, а $f : X \to X$ и $g : Y \to Y$ мерљиви конјугати при $h : X \to Y$. Доказати да је μ инваријантно (ергодичко) при f акко је $h_*\mu$ инваријантно (ергодичко) при g.*

Ако је μ инваријантно при f важи $\mu(f^{-1}B) = B$, па је

$$\begin{aligned} h_*\mu(g^{-1}A) &= \mu(h^{-1} \circ g^{-1}A) = \\ &= \mu((g \circ h)^{-1}A) = \\ &= \mu((h \circ f)^{-1}A) = \\ &= \mu(f^{-1} \circ g^{-1}A) = \\ &= \mu(h^{-1}A) = \\ &= h_*\mu(A). \end{aligned}$$

Са друге стране, ако је $h_*\mu$ инваријантно при g имамо:

$$\begin{aligned} \mu(f^{-1}A) &= \mu(h^{-1} \circ g^{-1} \circ hA) = \\ &= h_*\mu((g^{-1} \circ hA) = \\ &= h_*\mu(hA) = \\ &= \mu(h^{-1} \circ hA) = \\ &= \mu(A). \end{aligned}$$

Услов за ергодичност се лако проверава коришћењем једнакости $h = g^{-1} \circ h \circ f$. $\square$

Пример 27 *Пресликавање $f : [-2, 2] \to [-2, 2]$, $f(x) = x^2 - 2$ је познато као фон Нојман-Уламово пресликавање. Показати да је $\mu(A) = \frac{2}{\pi} \int_A \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ инваријантно и ергодичко за f.*

Приметимо да је $h : [0, 1] \to [-2, 2]$ $h(z) = 2 \cos \pi z$ конјугација између f и $g(z) = 1-|2z-1|$. Како је $(h^{-1})'(x) = \frac{-2}{\pi\sqrt{4-x^2}}$, то је (на основу претходног задатка) $h_*m(A) = \int_A |(h^{-1})'(x)|dx = \mu(A)$, f инваријантно и ергодичко. $\square$

Пример 28 *Показати да су пресликавања $f(x) = 1 - |2x - 1|$ и $g(x) = 4x(1 - x)$, $f, g : [0, 1] \to [0, 1]$ конјугована и да је мера $\mu = \varphi m$ f-инваријантна, при чему је $\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$.*

Пресликавања су конјугована при $sin^2(\frac{\pi x}{2})$, а на основу претходног задатка $h_* m$ је g-инваријантно јер је Лебегова мера f-инваријантна. Следи, $h_* m(A) = \int_A |(h^{-1})'(x)| dx = \int_A (\frac{2}{\pi} arcsin\sqrt{x})' dx = \int_A \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx = \varphi m(A)$.
$\square$

Пример 29 *Гељфандов*[38] *проблем је одређивање вероватноће појаве 7 као прве цифре броја* 2^n.

Према Бенфордовом закону, уколико бројеве изражавамо у основи $b \geq 2$ водећа цифра d се појављује са вероватноћом $P(d) = \log_b \frac{d+1}{d}$.

Број 2^n има d за водећу цифру акко $d \cdot 10^l \leq 2^n < (d+1) \cdot 10^l$, односно акко $\log_{10} d + l \leq n \log_{10} 2 < \log_{10}(r+1) + l$. Одавде, $\frac{1}{n}|\{k : 0 \leq k \leq n, 2^k$ има водећу цифру $d\}|$ је исто што и $\frac{1}{n}|\{k : 0 \leq k \leq n, \{k \log_{10} 2\} \in [\log_{10} d, \log_{10}(d+1)]\}|$. На основу равномерне расподељености, претходни израз конвергира ка $\log_{10}(d+1) - \log_{10} d$ кад $n \to \infty$, па је тражена вероватноћа $\log_{10}(\frac{8}{7})$. $\square$

Пример 30 *Одредићемо вероватноћу појаве друге цифре броја* 2^n.

Вероватноћа је задата са $\sum\limits_{q=1}^{9} A(q,d)$, где је $A(q,d)$ вероватноћа да је прва цифра d и друга цифра q.

Број 2^n има d за водећу цифру и q за другу водећу цифру акко $d \cdot q \cdot 10^l + d \cdot 10l - 1 \leq 2^n < q \cdot 10^l + (d+1) \cdot 10^{l-1}$, односно акко $\log_{10}(10q + d) + l - 1l \leq n \log_{10} 2 < \log_{10}(10q + d + 1) + l - 1$.

Одавде, на основу равномерне расподељености, израз $A(q,d)$ конвергира ка $\log_{10}(10q + d) - \log_{10}(10q + d - 1)$ кад $n \to \infty$, па је тражена вероватноћа $\log_{10} \prod\limits_{q=1}^{9} (1 + \frac{1}{10q+d})$. $\square$

Пример 31 *За скоро сваки реалан број* $x = [a_1, a_2, \dots] \in (0,1)$ *цифра* k *се појављује у верижном разломку са густином*

$$\frac{1}{\log 2} \log(\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}).$$

Приметимо да за $x = [x_0, x_1, \dots]$ важи $x_n = [\frac{1}{T^n x}]$ односно $x_n = k$ за $T^n x \in (\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]$.

[38] Израил Моисеевич Гелфанд, руски математичар

Стога,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}|\{0 \le j \le n-1 : x_j = k\}| &= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \chi_{(\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}]}(T^j x) \to \\ &\to \int \chi_{(\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}]} d\mu \text{ с.с. } x = \\ &= \frac{1}{\log 2}[\log{(1+\frac{1}{k})} - \log{(1+\frac{1}{k+1})}] \text{ с.с. } x = \\ &= \frac{1}{\log 2}\log{(\frac{(k+1)^2}{k(k+2)})} \text{ с.с. } x.\end{aligned}$$

□

15.2 Практичне примене

У пракси се стационарни и ергодични случајни процеси могу ефикасно применити при математичком представљању техничких комуникационих система (мобилна телефонија, интернет, телевизија) за пренос и обраду електромагнетних информационих сигнала.

Тада постоје два начина приказа случајних процеса: 1) у временском домену и 2) у фреквентном домену. При томе су поменуте методе представљања случајних процеса међусобно равноправне.

Представљање у временском домену има предност приликом одређивања експлоатационе карактеристике комуникационог система, док је фреквентни домен подеснији за одређивање физичких карактеристика нових саставних елемената, функционално везаних за фреквенцију и проток сигнала.

Математички прелаз с временског на фреквентни домен и обрнуто врши се применом одговарајуће директне и инверзне Фуријеове трансформације.

У суштини овај део није неопходан за разумевање главног дела рада. Циљ је да се осветли широко поље примене теорије ергодичности у савременим областима науке и технике и тим укаже на значајну тему која се строго математички разматрала у раду.

16 Додатак 1

Дефиниција Фамилија $\mathscr{I}$ подскупова на X је *полуалгебра* скупова на X ако има следећа три својства:

1. $X \in \mathscr{I}$.
2. Ако A и B припадају $\mathscr{I}$, онда и $A \cap B$ припада $\mathscr{I}$.
3. Ако $A \in \mathscr{I}$, онда се скуп $X \setminus A$ може представити као дисјунктна унија коначно много скупова из $\mathscr{I}$: $X \setminus A = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$, где је $A_k \in \mathscr{I}$ за $k = 1, \dots, n$.

□

Дефиниција Фамилија $\mathscr{A}$ подскупова на X је *алгебра* скупова на X ако је полуалгебра и има додатно својство:
Ако $A \in \mathscr{A}$, онда и $X \setminus A \in \mathscr{A}$. □

Дефиниција Нека је $\mathscr{A}$ алгебра скупова на скупу X. Функција $\mu : \mathscr{A} \to [0, +\infty]$ је *мера* на алгебри $\mathscr{A}$ ако има следећа својства:

1. $\mu(\emptyset) = 0$,
2. кад год је $A_1, A_2, \dots$ низ међусобно дисјунктних скупова из $\mathscr{A}$ такав да је $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}$, имамо $\mu(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

□

Дефиниција Фамилија $\mathfrak{M}$ подскупова скупа X је *σ-алгебра* X ако има следећа својства:

1. $X \in \mathfrak{M}$,
2. ако $A \in \mathfrak{M}$, онда $X \setminus A \in \mathfrak{M}$,
3. ако је $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ низ скупова из $\mathfrak{M}$, онда $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}$.

□

У том случају кажемо да је $(X, \mathfrak{M})$ мерљив простор, а скупове из $\mathfrak{M}$ називамо мерљивим скуповима.

Дефиниција Нека је $(X, \mathfrak{M})$ мерљив простор. Кажемо да је функција $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *мерљива* ако је скуп $f^{-1}((c, +\infty]) = \{x \in X : f(x) > c\}$ мерљив за свако $c \in \mathbb{R}$. $\square$

Еквивалентни услови мерљивости се добијају ако се скуп $(c, +\infty]$ замени неким од скупова $[-\infty, c]$, $[-\infty, c)$, $[c, +\infty]$, што се може видети у [12].

Дефиниција Нека је $(X, \mathfrak{M})$ мерљив простор и Y метрички простор. Кажемо да је $f : X \to Y$ *мерљива* функција ако је $f^{-1}(V)$ мерљив скуп за сваки отворен скуп $V \subset Y$. $\square$

Својство мерљивости функција се лепо слаже са збиром, производом, композицијом. (Видети Главу 4 у [12]).

Став 25 *Нека је $f_n : X \to [-\infty, +\infty]$ низ мерљивих функција на мерљивом простору $(X, \mathfrak{M})$. Тада су мерљиве и функције $G, g, H, h : X \to [-\infty, +\infty]$ задате формулама*

$$G(x) = \sup_{n \geq 1} f_n(x),$$

$$g(x) = \inf_{n \geq 1} f_n(x),$$

$$H(x) = \limsup_{n \to \infty} f_n(x),$$

$$h(x) = \liminf_{n \to \infty} f_n(x).$$

Доказ Видети 72. страницу Главе 4, у [12]. $\square$

Теорема 15 (о монотоној конвергенцији) *Нека је $f_n : X \to [0, +\infty]$ низ мерљивих функција на X такав да је $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ за свако $x \in X$ и сваки природан број n. Тада $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ постоји за свако $x \in X$, функција $f : X \to [0, +\infty]$ је мерљива и $\lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_A f_n d\mu = \int\limits_A d\mu$, за сваки мерљив $A \subset X$.*

Доказ Видети 79. страницу Главе 4, у [12]. $\square$

Теорема 16 (Фатуова лема) *Нека је $f_n : X \to [0, +\infty]$ низ мерљивих функција. Тада је, за сваки мерљив подскуп A простора X,*

$$\int\limits_A \liminf_{n \to \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int\limits_A f_n d\mu.$$

Доказ Видети 80. страницу Главе 4, у [12]. $\square$

Теорема 17 (о доминантној конвергенцији) *Нека је* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *низ комплексних мерљивих функција који тачка по тачка конвергира ка функцији* $f : X \to \mathbb{C}$. *Претпоставимо да постоји мерљива функција* $g : X \to [0, +\infty]$ *таква да је* $\int\limits_X g d\mu < +\infty$ *и да је* $|f_n(x)| \leq g(x)$ *за свако* $x \in X$ *и свако* $n \in \mathbb{N}$. *Тада* $f_n \in L^1(\mu)$ *за свако* $n \in \mathbb{N}$, $f \in L^1(\mu)$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_A |f - f_n| d\mu = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu = \int\limits_X f d\mu$.

Доказ Видети 83. страницу Главе 4, у [12]. $\square$

Литература

[1] E. Zehnder, Lectures on Dynamical Systems, European Mathematical Society, 2010.

[2] C. Walkden, Ergodic theory, http://www.maths.manchester.ac.uk/-cwalkden/ergodictheory/ergodic_theory.pdf

[3] P. Walters, An introduction to Ergodic Theory, Springer, 1975.

[4] M. Einsiedler, T. Ward, Ergodic Theory: with a view towards Number Theory, Springer-Verlag, London, 2011.

[5] M. Pollicott, M. Yuri, Dynamical systems and ergodic theory, University Press, Cambridge, 1998.

[6] K. Petersen, Ergodic theory, Cambridge University Press, 1989.

[7] Д. Милинковић, Увод у рачун на многострукостима, скрипта, http://poincare.matf.bg.ac.rs/ milinko/skripta/globalna.pdf

[8] R. Zweimuller, Hopf's ratio theorem by inducing, Colloqium Mathematicum, http://www.mat.univie.ac.at/ zweimueller/MyPub/z8.pdf

[9] A. Avila, J. Bochi, On the subadditive ergodic theorem, http://www.mat.uc.cl/ jairo.bochi/docs/kingbirk.pdf

[10] A. Karlsson, A proof of the subadditive ergodic theorem, http://www.unige.ch/math/folks/karlsson/subaddnew.pdf

[11] K. Dajani, S. Dirksin, A Simple Introduction to Ergodic Theory, http://www.staff.science.uu.nl/ kraai101/lecturenotes2009.pdf

[12] Д. Милинковић, Мини курс о симплектичким многострукостима, http://poincare.matf.bg.ac.rs/ milinko/skripta/simplekticke.pdf

[13] М. Арсеновић, М. Достанић, Д. Јоцић, Теорија мере, функционална анализа, теорија оператора, Завод за уџбенике, Београд, 2012.

[14] Д. Ђукић, Верижни разломци, http://infima.ba/wp-content/uploads/2012/02/veriznirazlomci_ddj.pdf

[15] Р. Живаљевић, -Бенфордов закон- или како погодити прву цифру броја, Тангента 45/1

[16] M. Moller, Ergodentheorie, https://www.uni-frankfurt.de/52367844/ergodentheorie_skript.pdf

[17] S. Luzzatto, Introduction to smooth ergodic theory, http://indico.ictp.it/event/a12289/session/2/contribution/1/material/0-/0.pdf

[18] Д.Аднађевић, З. Каделбург, Математичка анализа 2, Математички факултет, Београд, 2008.

[19] Ronald Gunesch, Ergodentheorie, https://www.math.uni-hamburg.de/home/gunesch/Vorlesung/WiSe2007-8/Ergodentheorie/Skript/Skript_Ergodentheorie.pdf

[20] В. Арнолд, А. Авец, Ергодические проблемы классическои механики, Ижевск: Ижевская республиканская типография, 1999.

[21] J. Andreu, L. Cami, Ergodic theory, http://wwwf.imperial.ac.uk/ mrasmuss/ergodictheory/ErgodicTheoryNotes.pdf

[22] M. Hochman, Notes on ergodic theory, http://math.huji.ac.il/ mhochman/courses/ergodic-theory-2012/notes.final.pdf