КОЛОКВИЈУМ ЗА ПОНЕТИ

1. Тврђења

(1) Многострукост $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$ има скоро комплексну, а нема симплектичку структуру.
(2) Сфера $\mathbb{S}^2$ није паралелизабилна.
(3) Низ

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & 0 & & \\
 & & & & & & \downarrow & & \\
0 & \rightarrow & \mathbb{R} & \rightarrow & C^\infty(M) & \rightarrow & \mathrm{Ham}(M) & \rightarrow & 0 \\
 & & & & & & \downarrow & & \\
 & & & & & & \mathrm{Sympl}(M) & & \\
 & & & & & & \downarrow & & \\
 & & & & & & H^1(M) & & \\
 & & & & & & \downarrow & & \\
 & & & & & & 0 & &
\end{array}
$$

је тачан.

2. Докази

(1) $TM = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$. Сфере димензије 1 и 3 имају тривијална раслојења, па је и раслојење TM тривијално и на њему може да се дефинише скоро комплексна структура. Пошто је $H^2(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3) \neq 0$, на $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$ не може да се дефинише симплектичка структура.
(2) Пошто је $\chi(\mathbb{S}^2) = 2$, свако векторско поље на $\mathbb{S}^3$ има нулу, док тривијална раслојења имају сечења свуда различита од нуле.
(3) Због недегенерисаности симплектичке форме Хамилтоново векторско поље је једнозначно одређено диференцијалом Хамилтонијана, а диференцијал Хамилтонијана одређује Хамилтонијан једнозначно до на константу. Одатле следи тачност хоризонталног низа. Тачност вертикалног низа следи из чињенице да је за симплектичко (Хамилтоново) векторско поље X форма $i(X)\omega$ затворена (тачна) и дефиниције де Рамове кохомологије као количника простора затворених и тачних форми.

3. Задаци

(1) Формулисати дефиницију векторског раслојења, изоморфизма раслојења и дефиниције тангентног и котангентног вектора, простора и раслојења.
   - Доказати да је раслојење ранга r тривијално ако и само ако има r сечења, линеарно независних у свакој тачки.
   - Доказати да је са $\mathbb{S}^1 \ni x \mapsto \imath \cdot x \in T_x\mathbb{S}^1$, где је $\imath \in \mathbb{C}$ имагинарна јединица, дефинисано сечење раслојења $T\mathbb{S}^1$ које нигде није нула. Закључити да је $T\mathbb{S}^1$ тривијално раслојење.

- Доказати да су са $\mathbb{S}^3 \ni x \mapsto \imath \cdot x, \jmath \cdot x, k \cdot x \in T_x\mathbb{S}^3$, где су $\imath, \jmath, k$ јединични кватерниони, дефинисана три линеарно независна сечења раслојења $T\mathbb{S}^3$. Закључити да је $T\mathbb{S}^3$ тривијално раслојење.
- Доказати да је $T(N_1 \times N_2) = TN_1 \oplus TN_2$.
- Доказати да је $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$ паралелизабилна многострукост.
- Доказати да паралелизабилна многострукост парне димензије допушта скоро комплексну структуру.
- Користећи Мајер – Вијеторисов низ и индукцију по n израчунати кохомологију сфере $\mathbb{S}^n$.
- Израчунати $H^j(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m)$.
- Ако је M симплектичка многострукост са симплектичком формом ω, доказати да је $\mathrm{dim}M = 2n$ за неко $n \in \mathbb{N}$ и да је $\omega^{\wedge n}$ форма запремине (оријентације).
- Доказати да компактна симплектичка многострукост има нетривијалне парне кохомологије. Закључити да $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$ не допушта симплектичку структуру.
- Да ли некомпактна симплектичка многострукост може да има тривијалне парне кохомологије?

(2) Формулисати дефиницију Ојлерове класе раслојења и три еквивалентне дефиниције Ојлерове карактеристике многострукости: помоћу векторских поља, кохомологија и интеграла Ојлерове класе.

- Израчунати Ојлерову карактеристику сфере $\mathbb{S}^n$.
- Доказати да на сфери парне димензије не постоји векторско поље које није нигде нула. Закључити да сфера парне димензије није паралелизабилна.
- Доказати да на сфери непарне димензије постоји векторско поље које нигде није једнако нули, имитирајући горе наведене доказе за сфере димензије 1 и 3 и користећи чињеницу да је $\mathbb{S}^{2n-1}$ хиперповрш у $\mathbb{C}^n$.
- Да ли на свакој хиперповрши у $\mathbb{C}^n$ (која је глатка подмногострукост многострукости $\mathbb{C}^n$) постоји векторско поље које нигде није једнако нули?
- Да ли на свакој кривој која је глатка подмногострукост у $\mathbb{C}$ постоји векторско поље које нигде није једнако нули?

(3) Нека је M повезана симплектичка многострукост са симплектичком формом ω.

- Доказати да једнопараметарска фамилија дифеоморфизама генерисана векторским пољем X чува симплектичку форму ако и само ако је $i(X)\omega$ затворена форма.
- Доказати да је $T_pM \ni X_p \mapsto i(X_p)\omega \in T_p^*M$ дефинисан изоморфизам векторских простора. Доказати да је тиме дефинисан и изоморфизам раслојења.
- Доказати да Хамилтонијан једнозначно одређује Хамилтоново векторско поље, а да Хамилтоново векторско поље одређује Хамилтонијан једнозначно до на константу.
- Дефинисати сва пресликавања у горњем дијаграму.
- Прецизно доказати да су низови у горњем дијаграму тачни.