Zadatak 1 *Dokazati da ne postoji nijedna reč x azbuke $\Sigma = \{a, b\}$ za koju važi jednakost $xa = bx$.*

Rešenje:
Izvedimo dokaz matematičkom indukcijom po dužini reči x.

1° Za praznu reč ε ne važi jednakost $\varepsilon a = b\varepsilon$ (jer je $a \neq b$), pa tvrđenje važi za reč x dužine 0.

Za $|x| = 1$, važi $x = a$ ili $x = b$. Međutim, kako je $aa \neq ba$ i $ba \neq bb$, sledi da tvrđenje važi za reči x dužine 1.

2° Pretpostavimo da tvrđenje važi za sve reči dužine $n-2$ i dokažimo da onda važi i za reči dužine n.

Pretpostavimo suprotno – da postoji reč x dužine n takva da važi $xa = bx$. Dakle, reč x počinje slovom b, a završava se slovom a, pa reč x može biti napisana u obliku $x = bya$, gde je y reč dužine $|x| - 2 = n - 2$. Onda važi:

$$byaa = bbya \ ,$$

odakle nakon skraćivanja sledi

$$ya = by \ ,$$

tj. reč y je rešenje zadate jednačine i $|y| = n - 2$, što je u kontradikciji sa induktivnom pretpostavkom, odakle sledi da ne postoji reč x dužine n takva da važi $xa = bx$.

Tvrđenje je dokazano za reči dužine 0 i 1, pa, iz dokazanog induktivnog koraka, sledi da tvrđenje važi za sve prirodne brojeve, čime je dokazano da ne postoji nijedna reč x azbuke $\Sigma = \{a, b\}$ za koju važi jednakost $xa = bx$.

Zadatak 2 *Rešiti nad azbukom $\Sigma = \{a, b, c\}$ jednačinu po x: $ax = xa$.*

Rešenje:
Skup rešenja jednačine je skup reči oblika a^n, $(n \geq 0)$.

($\supseteq$): Za svako $n \geq 0$, reč a^n jeste rešenje, jer $aa^n = a^{n+1} = a^n a$.

($\subseteq$): Indukcijom po dužini reči x dokazujemo da je svako rešenje oblika a^n $(n \geq 0)$.

[1]Zasnovano na materijalu "Teorija algoritama jezika i automata" Predraga Janičića

(1°) Za $|x| = 0$, odnosno $x = \varepsilon$ iz $ax = xa$ sledi $x = a^0$.
Za $|x| = 1$ iz $ax = xa$ sledi $x = a$, tj. $x = a^1$.

(2°) Pretpostavimo da je tvrđenje tačno za sve reči dužine $n-2$ i dokažimo da je tačno i za reči dužine n. Neka je $|x| = n$ i neka je $ax = xa$. Dakle, reč x počinje i završava se slovom a, pa je $x = aya$, gde je y reč nad zadatom azbukom dužine $n-2$. Skraćivanjem se iz $aaya = ayaa$ dobija $ay = ya$, pa je reč y rešenje zadate jednačine dužine $n-2$. Na osnovu induktivne pretpostavke, reč y je oblika a^n, $n \geq 0$, pa je reč x oblika a^{n+2}, $n \geq 0$.

Dakle, svako rešenje date jednačine je oblika a^n $(n \geq 0)$.

Dakle, skup rešenja jednačine je skup reči oblika a^n $(n \geq 0)$.

Zadatak 3 *Odrediti jezik generisan gramatikom $G = (N, \Sigma, P, S)$, gde je $N = \{S\}$,*
$\Sigma = \{a, b\}$,
$P = \{S \to aS \ (1°), S \to b \ (2°)\}$.

Rešenje:
(Primer izvođenja u gramatici G: $S \overset{1°}{\Rightarrow} aS \overset{1°}{\Rightarrow} aaS \overset{1°}{\Rightarrow} aaaS \overset{2°}{\Rightarrow} aaab$)
Dokažimo da važi:

$$L(G) = \{a^n b \mid n \in \mathbf{N}_0\} \ .$$

$\subseteq$: <u>Svaka završna reč koja se izvodi u gramatici G je oblika $a^n b, n \in \mathbf{N}_0$.</u>
Dokažimo indukcijom jače tvrđenje:

Lema 1 *Sve rečenične forme koje mogu biti izvedene u gramatici G su oblika $a^n S$ ili oblika $a^n b$ $(n \in \mathbf{N}_0)$.*

Dokaz indukcijom po dužini izvođenja:

(1) $k = 0$: U izvođenju nije primenjeno nijedno pravilo izvođenja, tj. izvođenje je trivijalno; za početni simbol S, dakle, dobija se takođe reč S. Kako je $S = a^0 S$, tvrđenje važi za $k = 0$.

(2) Pretpostavimo da tvrđenje važi za sva izvođenja čija je dužina manja od k i dokažimo da važi i za izvođenja dužine k.

Neka se reč w može dokazati u k koraka: $S \overset{k}{\Rightarrow} w$. Tada postoji reč w' za koju važi $S \overset{k-1}{\Rightarrow} w' \Rightarrow w$. Reč w' je izvedena izvođenjem dužine $k-1$, pa je, na osnovu induktivne hipoteze, w' oblika $a^n S$ ili oblika $a^n b$ $(n \in \mathbf{N}_0)$. Reč w se netrivijalno (izvođenjem dužine 1) izvodi iz reči w', pa w' mora da ima nezavršnih simbola. Dakle, w' je oblika $a^n S$. Ako je u $k-$tom koraku primenjeno pravilo 1°, onda je w oblika $a^{n+1} S$, a ako je primenjeno pravilo 2°, onda je w oblika $a^n b$.

Dakle, sve reči koje mogu biti izvedene u gramatici G su oblika $a^n S$ ili oblika $a^n b$ $(n \in \mathbf{N}_0)$, što je i trebalo dokazati.

Na osnovu leme, svi članovi izvođenja (sve reči koje mogu biti izvedene u gramatici G) su oblika $a^n S$ ili oblika $a^n b$ $(n \in \mathbf{N}_0)$, pa i završne reči – reči bez nezavršnih simbola. Završne reči ne mogu biti oblika $a^n S$ (jer je S nezavršni simbol), pa su sve završne reči oblika $a^n b$ $(n \in \mathbf{N}_0)$. Dakle, $L(G) \subseteq \{a^n b \mid n \in \mathbf{N}_0\}$.

$\supseteq$: <u>Svaka reč $a^n b$, $n \in \mathbf{N}_0$, može biti izvedena u gramatici G.</u>
Za proizvoljno n $(n \in \mathbf{N}_0)$ reč $a^n b$ može biti izvedena u gramatici G:

$$S \underbrace{\overset{1°}{\Rightarrow} aS \overset{1°}{\Rightarrow} \ldots \overset{1°}{\Rightarrow}}_{n} a^n S \overset{2°}{\Rightarrow} a^n b$$

Zadatak 4 (DOMAĆI) *Odrediti jezik generisan gramatikom $G = (N, \Sigma, P, S)$, gde je $N = \{S\}$,*
$\Sigma = \{a, b\}$,
$P = \{S \to aSb \ (1°), S \to \varepsilon \ (2°)\}$.

Zadatak 5 *Odrediti gramatiku koja generiše jezik $W = \{a^{2i} b^i \mid i > 0\}$.*

Rešenje:
$G = (N, \Sigma, P, S)$, gde je $N = \{S\}$,
$\Sigma = \{a, b\}$,
$P = \{S \to aab \ (1°), S \to aaSb \ (2°)\}$
Dokažimo da važi $W = L(G)$.

$\subseteq$: Neka je $w \in W$, tj. neka je $w = a^{2i} b^i$, gde je $i > 0$.
<u>w se može izvesti u gramatici G.</u>
$S \overset{2°\,i-1}{\Rightarrow} (aa)^{i-1} S b^{i-1} \overset{1°}{\Rightarrow} (aa)^i b^i$.
Dakle, $W \subseteq L(G)$.

$\supseteq$: Indukcijom se može dokazati da je svaki član izvođenja w oblika $a^{2i} S b^i$ $(i \geq 0)$ ili oblika $a^{2i} b^i$ $(i > 0)$. Završna reč w ne može da sadrži simbol S, pa je oblika $a^{2i} b^i$ $(i > 0)$, odakle sledi $W \supseteq L(G)$.