

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА СОВЕТСКИХ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ
РЕСПУБЛИК

БЮЛЛЕТЕНЬ ИНСТИТУТА
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ АСТРОНОМИИ

Том XI, № 1 (124)

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ЛЕНИНГРАДСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ЛЕНИНГРАД · 1967

**Определение кратчайшего расстояния
между орбитами астероидов с малым взаимным наклоном**

И. П. Лазович

Изложен новый метод определения кратчайшего расстояния между двумя эллиптическими орбитами. Метод применяется к паре известных астероидов, плоскости орбит которых мало наклонены друг к другу.

THE DETERMINATION OF THE PROXIMITY OF QUASICOMPLANAR ASTEROIDAL ORBITS, by J. P. Lazović. — A new procedure is given for the determination the shortest distance between two elliptic orbits, and applied to the case of a pair of known asteroids moving in quasicomplanar orbits.

Проблема определения наименьшего расстояния между орбитами была поставлена почти 100 лет тому назад. Ее рассматривал также Галле в своей докторской диссертации (Galle, 1883). Автор в предыдущей работе (1964) занимался проблемой определения наименьшего расстояния между орбитами астероидов с малыми взаимными наклонами (квазикомпланарными орбитами) и дал один метод ее решения. В настоящей статье будет изложен новый способ определения наименьшего расстояния, а полученные результаты применены с целью проверки к той же паре малых планет с квази-компланарными орбитами, которая была предметом изучения предыдущей работы.

1. Радиус-вектор материальной точки, движущейся по эллиптической орбите, может быть представлен в виде

$$\mathbf{r} = r \cos v \mathbf{P} + r \sin v \mathbf{Q}, \quad (1)$$

где v — истинная аномалия, а \mathbf{P} и \mathbf{Q} — орты в плоскости орбиты, первый из которых направлен в перигелий, а второй перпендикулярен к нему, т. е. для орты \mathbf{Q} $v = 90^\circ$. Компоненты векторов \mathbf{P} и \mathbf{Q} выражаются через известные эллиптические элементы орбиты Ω , ω и i . Поэтому для прямоугольных координат двух астероидов в функции истинных аномалий получим

$$s_i = F_{si}(v_i) = r_i \cos v_i P_{si} + r_i \sin v_i Q_{si}, \quad (2)$$

$$(s = x, y, z; i = 1, 2),$$

где

$$r_i = p_i (1 + e_i \cos v_i)^{-1}, \quad p_i = a_i (1 - e_i^2) = a_i \cos^2 \varphi_i. \quad (3)$$

Для квадрата взаимного расстояния двух материальных точек, движущихся в пространстве по двум различным эллиптическим орбитам, имеем

$$\rho^2 = [F_{x1}(v_1) - F_{x2}(v_2)]^2 + [F_{y1}(v_1) - F_{y2}(v_2)]^2 + [F_{z1}(v_1) - F_{z2}(v_2)]^2, \quad (4)$$

следовательно, $\rho^2 = F(v_1, v_2)$, причем v_1 и v_2 — две независимые переменные. Заметим, что $\min \rho$ имеет место в тот же момент, когда и $\min \rho^2$, так как всегда $\rho > 0$; поэтому уравнения для определения точек орбит с наименьшим взаимным расстоянием имеют вид

$$\frac{\partial \rho^2}{\partial v_1} = 0, \quad \frac{\partial \rho^2}{\partial v_2} = 0. \quad (5)$$

Из уравнений (5) и (4) после некоторых преобразований следует

$$[F_{x1}(v_1) - F_{x2}(v_2)] F'_{xi}(v_i) + [F_{y1}(v_1) - F_{y2}(v_2)] F'_{yi}(v_i) + \\ + [F_{z1}(v_1) - F_{z2}(v_2)] F'_{zi}(v_i) = 0, \quad (i = 1, 2). \quad (6)$$

Дифференцирование (2) по переменной v_i дает

$$F'_{si}(v_i) = r'_i \cos v_i P_{si} - r_i \sin v_i P_{si} + r'_i \sin v_i Q_{si} + r_i \cos v_i Q_{si}, \quad (s = x, y, z; \quad i = 1, 2). \quad (7)$$

Дифференцируя (3) по v_i , находим

$$r'_i = e_i p_i \sin v_i (1 + e_i \cos v_i)^{-2}. \quad (8)$$

Соотношение (7) с учетом (8) и (3) принимает вид

$$F'_{si}(v_i) = p_i (1 + e_i \cos v_i)^{-2} [Q_{si} (e_i + \cos v_i) - P_{si} \sin v_i], \quad (9)$$

$$(s = x, y, z; \quad i = 1, 2).$$

Умножая теперь первое соотношение (6) на

$$p_1^{-1} (1 + e_1 \cos v_1)^3 (1 + e_2 \cos v_2),$$

а второе на

$$p_2^{-1} (1 + e_1 \cos v_1) (1 + e_2 \cos v_2)^3$$

и принимая во внимание (2), (3) и (9), получим:

$$(e_i Q_{xi} + Q_{xi} \cos v_i - P_{xi} \sin v_i) [(1 + e_2 \cos v_2) (p_1 P_{x1} \cos v_1 + p_1 Q_{x1} \sin v_1) - (1 + e_1 \cos v_1) \times \\ \times (p_2 P_{x2} \cos v_2 + p_2 Q_{x2} \sin v_2)] + (e_i Q_{yi} + Q_{yi} \cos v_i - P_{yi} \sin v_i) [(1 + e_2 \cos v_2) (p_1 P_{y1} \cos v_1 + \\ + p_1 Q_{y1} \sin v_1) - (1 + e_1 \cos v_1) (p_2 P_{y2} \cos v_2 + p_2 Q_{y2} \sin v_2)] + (e_i Q_{zi} + Q_{zi} \cos v_i - \\ - P_{zi} \sin v_i) [(1 + e_2 \cos v_2) (p_1 P_{z1} \cos v_1 + p_1 Q_{z1} \sin v_1) - (1 + e_1 \cos v_1) \times \\ \times (p_2 P_{z2} \cos v_2 + p_2 Q_{z2} \sin v_2)] = 0, \quad (i = 1, 2).$$

Если умножить второе соотношение (6) на -1 и ввести следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} e_1 e_2 p_1 + p_2 (P_{x1} P_{x2} + P_{y1} P_{y2} + P_{z1} P_{z2}) &= A_1, \\ e_1 e_2 p_2 + p_1 (P_{x1} P_{x2} + P_{y1} P_{y2} + P_{z1} P_{z2}) &= A_2, \\ -e_1 p_2 (Q_{x1} Q_{x2} + Q_{y1} Q_{y2} + Q_{z1} Q_{z2}) &= B_1, \\ -e_2 p_1 (Q_{x1} Q_{x2} + Q_{y1} Q_{y2} + Q_{z1} Q_{z2}) &= B_2, \\ -e_1 p_2 (P_{x2} Q_{x1} + P_{y2} Q_{y1} + P_{z2} Q_{z1}) &= C_1, \\ -e_2 p_1 (P_{x1} Q_{x2} + P_{y1} Q_{y2} + P_{z1} Q_{z2}) &= C_2, \\ p_2 (P_{x1} Q_{x2} + P_{y1} Q_{y2} + P_{z1} Q_{z2}) &= D_1, \\ p_1 (P_{x2} Q_{x1} + P_{y2} Q_{y1} + P_{z2} Q_{z1}) &= D_2, \\ -p_2 (1 + e_1^2) (P_{x2} Q_{x1} + P_{y2} Q_{y1} + P_{z2} Q_{z1}) &= F_1, \\ -p_1 (1 + e_2^2) (P_{x1} Q_{x2} + P_{y1} Q_{y2} + P_{z1} Q_{z2}) &= F_2, \\ -p_2 (1 + e_1^2) (Q_{x1} Q_{x2} + Q_{y1} Q_{y2} + Q_{z1} Q_{z2}) &= G_1, \\ -p_1 (1 + e_2^2) (Q_{x1} Q_{x2} + Q_{y1} Q_{y2} + Q_{z1} Q_{z2}) &= G_2, \\ e_1 p_2 (P_{x1} P_{x2} + P_{y1} P_{y2} + P_{z1} P_{z2}) &= H_1, \\ e_2 p_1 (P_{x1} P_{x2} + P_{y1} P_{y2} + P_{z1} P_{z2}) &= H_2, \\ e_1 D_1 = K_1, \quad e_2 D_2 = K_2, \quad e_1 p_1 = s_1, \quad e_2 p_2 = s_2, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

то уравнения, определяющие истинные аномалии точек орбит с наименьшим взаимным расстоянием, могут быть приведены к виду

$$\left. \begin{aligned} (B_1 + D_1 \sin v_1 + G_1 \cos v_1 + K_1 \sin v_1 \cos v_1 + B_1 \cos^2 v_1) \sin v_2 + (C_1 + A_1 \sin v_1 + F_1 \cos v_1 + \\ + H_1 \sin v_1 \cos v_1 + C_1 \cos^2 v_1) \cos v_2 + s_1 \sin v_1 = 0, \\ (B_2 + D_2 \sin v_2 + G_2 \cos v_2 + K_2 \sin v_2 \cos v_2 + B_2 \cos^2 v_2) \sin v_1 + (C_2 + A_2 \sin v_2 + F_2 \cos v_2 + \\ + H_2 \sin v_2 \cos v_2 + C_2 \cos^2 v_2) \cos v_1 + s_2 \sin v_2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

или короче

$$\left. \begin{aligned} f(v_1, v_2) &\equiv V_1 \sin v_2 + W_1 \cos v_2 + s_1 \sin v_1 = 0, \\ g(v_1, v_2) &\equiv V_2 \sin v_1 + W_2 \cos v_1 + s_2 \sin v_2 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где

$$\left. \begin{aligned} B_i + D_i \sin v_i + G_i \cos v_i + \frac{1}{2} K_i \sin 2v_i + B_i \cos^2 v_i &= V_i = V_i(v_i), \\ C_i + A_i \sin v_i + F_i \cos v_i + \frac{1}{2} H_i \sin 2v_i + C_i \cos^2 v_i &= W_i = W_i(v_i), \quad (i=1, 2). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Уравнения (12) пригодны для определения точек с наименьшим взаимным расстоянием и в общем случае эллиптического движения.

2. Решение уравнений (12) выполняется значительно легче и проще в случае движения астероидов по орбитам, мало наклоненным друг к другу.

Ввиду трансцендентного характера уравнений (12) мы выбираем для их решения метод последовательных приближений, исходя из приближенных значений неизвестных v_{10} и v_{20} (достаточно близких к искомым) и определяя последовательные, уменьшающиеся поправки $\Delta v_{10}, \Delta v_{20}; \Delta v_{11}, \Delta v_{21}; \dots; \Delta v_{1(k-1)}, \Delta v_{2(k-1)}$ до тех пор, пока для каждой системы, т. е. для каждой точки сближения (или пересечения) орбит, не найдем значений

$$v_{1k} = v_{1(k-1)} + \Delta v_{1(k-1)} \quad \text{и} \quad v_{2k} = v_{2(k-1)} + \Delta v_{2(k-1)}, \quad (14)$$

удовлетворяющих исходную систему совместных уравнений (12) с требуемой степенью точности.

Для каждой отдельной пары астероидов существует столько таких систем значений, сколько имеется точек сближений (или пересечений) их орбит.

Поправки Δv_{ij} определяются из выражений, которые получаются, если разложить левые части уравнений (12) в ряды Тэйлора и пренебречь членами, содержащими степени Δv_{ij} и Δv_{2j} выше первой и произведения этих величин. Так можно поступить в том случае, когда исходные значения неизвестных уже достаточно близки к искомым.

Первые поправки к исходным значениям мы определим из следующих уравнений:

$$\left. \begin{aligned} f_0 + \Delta v_{10} f'_{e_{10}} + \Delta v_{20} f'_{e_{20}} &= 0, \\ g_0 + \Delta v_{10} g'_{e_{10}} + \Delta v_{20} g'_{e_{20}} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где $f_0 = f(v_{10}, v_{20})$, $g_0 = g(v_{10}, v_{20})$ и $f'_{e_{10}} = \left(\frac{\partial f}{\partial v_1} \right)_{v_1=e_{10}, v_2=e_{20}}$; $f'_{e_{20}} = \left(\frac{\partial f}{\partial v_2} \right)_{v_1=e_{10}, v_2=e_{20}}$;

$g'_{e_{10}} = \left(\frac{\partial g}{\partial v_1} \right)_{v_1=e_{10}, v_2=e_{20}}$; $g'_{e_{20}} = \left(\frac{\partial g}{\partial v_2} \right)_{v_1=e_{10}, v_2=e_{20}}$.

Решая систему уравнений (15), получим с принятой степенью точности значения поправок

$$\Delta v_{10} = \frac{g_0 f'_{e_{20}} - f_0 g'_{e_{20}}}{f'_{e_{10}} g'_{e_{20}} - f'_{e_{20}} g'_{e_{10}}}, \quad \Delta v_{20} = \frac{f_0 g'_{e_{10}} - g_0 f'_{e_{10}}}{f'_{e_{10}} g'_{e_{20}} - f'_{e_{20}} g'_{e_{10}}}, \quad (16)$$

выраженные в радианной мере. Эти поправки могут быть уточнены аналогичным способом, и мы получим следующее, более точное решение:

$$v_{12} = v_{10} + \Delta v_{10} + \Delta v_{11} = v_{11} + \Delta v_{11}, \quad v_{22} = v_{20} + \Delta v_{20} + \Delta v_{21} = v_{21} + \Delta v_{21}.$$

Указанная процедура повторяется до тех пор, пока в двух последовательных приближениях не получим одинаковые значения истинных аномалий. Этот процесс быстро сходится: уже после двух приближений получается искомое решение.

Отметим следующее. С математической точки зрения для решения этих трансцендентных уравнений необходимо, чтобы было выполнено условие применимости метода итерации. Поскольку астероиды движутся по орбитам, кратчайшее расстояние между которыми заведомо существует, то существует и решение этой проблемы независимо от результата математического анализа.

Частные производные, входящие в выражения (16), могут быть определены из уравнения (12) и (13) и имеют вид

$$\left. \begin{aligned} f'_{v_1} &= \frac{\partial f}{\partial v_1} = \theta_1 \sin v_2 + v_1 \cos v_2 + s_1 \cos v_1, \\ f'_{v_2} &= \frac{\partial f}{\partial v_2} = V_1 \cos v_2 - W_1 \sin v_2, \\ g'_{v_1} &= \frac{\partial g}{\partial v_1} = V_2 \cos v_1 - W_2 \sin v_1, \\ g'_{v_2} &= \frac{\partial g}{\partial v_2} = \theta_2 \sin v_1 + v_2 \cos v_1 + s_2 \cos v_2, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \theta_i &= D_i \cos v_i - G_i \sin v_i + K_i \cos 2v_i - B_i \sin 2v_i, \\ v_i &= A_i \cos v_i - F_i \sin v_i + H_i \cos 2v_i - C_i \sin 2v_i, \quad (i=1, 2). \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

С определенными таким образом парами значений истинных аномалий по формулам (2) и (3) вычисляются прямоугольные гелиоцентрические эклиптические координаты точек пересечения орбит обоих астероидов. Затем при помощи формулы (4) для каждой точки пересечения орбит вычисляют значения ρ и в качестве решения поставленной задачи берут минимальное из двух или четырех значений.

3. Предыдущие выкладки сокращаются при рассмотрении случая движения астероидов с малым взаимным наклоном орбит. Решение здесь упрощается за счет того, что приближенные значения истинных аномалий v_{10} и v_{20} могут быть найдены графическим путем. Поэтому можно сравнить значения истинных аномалий «точек пересечения» орбит, снятые с соответствующего графика, со значениями истинных аномалий относительных узлов (Lazović, 1964), а затем определить, какие исходные значения истинных аномалий отвечают положениям на кратчайшем расстоянии. В случае квазикомпланарных орбит вычисления производятся с одной парой исходных приближенных значений истинных аномалий и необходимо решить только одну систему двух трансцендентных уравнений. Это даст наименьшее расстояние между двумя эллиптическими орбитами; далее можно вычислить и сферические координаты наиболее близких точек в гелиоцентрической эклиптической системе отсчета.

4. Указанная методика была применена мною, как и в предыдущей работе (1964), к паре квазикомпланарных орбит астероидов 589 Croatia и 1564 Srbija. Мы воспользовались следующими элементами:

	589 Croatia	1564 Srbija
φ	2°282	12°2161
e	0.0398179	0.2115994
p	3.1295420	3.0082028
P_x	0.8044313	0.6542038
P_y	0.5832113	0.7419450
P_z	-0.1129375	-0.1467485
Q_x	-0.5940412	-0.7563071
Q_y	0.7904898	0.6428220
Q_z	-0.1491353	-0.1215710

С их помощью по формулам (10) имеем:

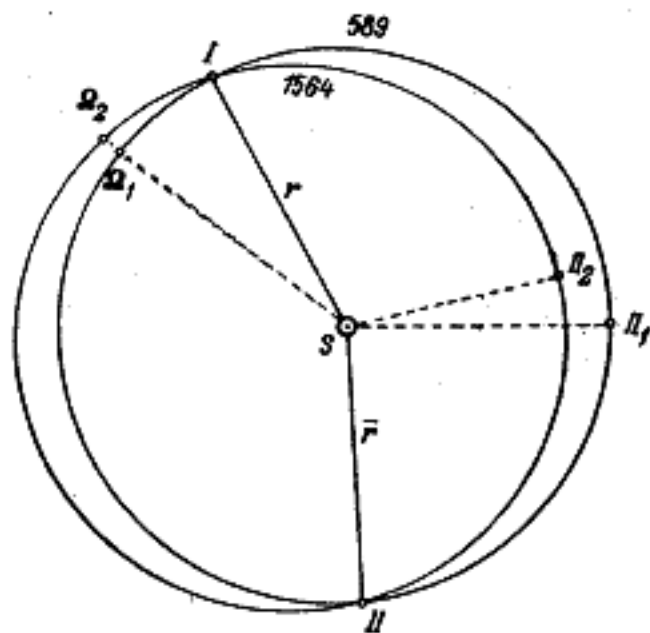
$$\begin{aligned} A_1 &= 2.9610083, & C_2 &= 0.1455311, \\ A_2 &= 3.0783579, & D_1 &= -0.6611010, \\ B_1 &= -0.1168519, & D_2 &= 0.6877519, \\ B_2 &= -0.6460196, & F_1 &= -0.6621344, \\ C_1 &= -0.0263231, & F_2 &= 0.7185615, \\ G_1 &= -2.9393117, & s_1 &= 0.1246118, \\ G_2 &= -3.1897290, & s_2 &= 0.6365339, \\ H_1 &= 0.1168512, & K_1 &= -0.0263236, \\ H_2 &= 0.6460156, & K_2 &= 0.1455279, \\ \frac{1}{2} H_1 &= 0.0584256, & \frac{1}{2} H_2 &= 0.3230078, \\ \frac{1}{2} K_1 &= -0.0131618, & \frac{1}{2} K_2 &= 0.0727640. \end{aligned}$$

В силу малости относительного наклона плоскостей орбит этих астероидов ($I=0^{\circ}13'39''.8$) можно считать, что оба астероида движутся в одной и той же плоскости. Тогда по заданным элементам можно построить с достаточно высокой степенью точности и в достаточно большом масштабе (в нашем случае 1 а. е. = 85 мм) обе орбиты (см. рисунок).

По этому рисунку можно непосредственно определить число точек пересечения и, что весьма важно, исходные значения истинных аномалий этих точек, в которых следует ожидать сближения астероидов.

Сравнение значений истинных аномалий точек I и II, определенных по рисунку, и относительных узлов орбит показывает, что сближению соответствует точка I. В качестве исходных берут поэтому значения, отвечающие этой точке пересечения. Мы обозначим их, как выше, через v_{10} , v_{20} . Напомним, что первая цифра индекса относится к астероиду (в данном случае индекс 1—589, индекс 2—1564), а вторая указывает порядковый номер приближения, в котором получено рассматриваемое значение.

5. Применение описанной выше методики дает в первом приближении



$$v_{10} = 118^{\circ}6, \quad v_{20} = 105^{\circ}4;$$

$$V_{10} = 0.6940246, \quad W_{10} = 2.8352078; \quad V_{20} = 0.7812752, \quad W_{20} = 2.7674124;$$

$$f_0 = 0.0256062, \quad g_0 = -0.0251122;$$

$$\theta_{10} = 2.8131673, \quad \nu_{10} = -0.9214935; \quad \theta_{20} = 2.4367740, \quad \nu_{20} = -1.9906219;$$

$$f'_{s_{20}} = 2.8972192, \quad g'_{s_{20}} = -2.8037312, \quad f'_{s_{10}} = -2.9177133, \quad g'_{s_{10}} = 2.9233053;$$

$$g_0 f'_{s_{20}} - f_0 g'_{s_{20}} = -0.001584540, \quad f_0 g'_{s_{10}} - g_0 f'_{s_{10}} = 0.0009626461, \quad f'_{s_{10}} g'_{s_{20}} - f'_{s_{20}} g'_{s_{10}} = 0.2889724;$$

$$\Delta v_{10} = -0.0054834 \text{ rad.}, \text{ т. е. } \Delta v_{10} = -0^{\circ}31'42,$$

$$\Delta v_{20} = 0.0033313 \text{ rad.}, \text{ т. е. } \Delta v_{20} = 0^{\circ}19'09;$$

$$v_{11} = 118^{\circ}28'58, \quad v_{21} = 105^{\circ}59'09.$$

Второе приближение:

$$f_1 = -0.0000098, \quad g_1 = -0.0000089;$$

$$\Delta v_{11} = 0.0002078 \text{ rad.}, \text{ т. е. } \Delta v_{11} = 0^{\circ}01'19,$$

$$\Delta v_{21} = 0.0002031 \text{ rad.}, \text{ т. е. } \Delta v_{21} = 0^{\circ}01'16;$$

$$v_{12} = 118^{\circ}29'77, \quad v_{22} = 105^{\circ}60'25. \quad (19)$$

Оказалось, что достаточно этих двух приближений, так как

$$f_2 = 0.0000016, \quad g_2 = -0.0000016;$$

$$\Delta v_{12} = 0.000000028 \text{ rad.}, \text{ т. е. } \Delta v_{12} = 0^{\circ}00'00,$$

$$\Delta v_{22} = 0.000000576 \text{ rad.}, \text{ т. е. } \Delta v_{22} = 0^{\circ}00'00.$$

Положив теперь $v_{12} = v_1$, $v_{22} = v_2$ и воспользовавшись соотношениями (3) и (2), принимая основные значения из раздела 4, находим прямоугольные гелиоцентрические эклиптические координаты астероидов при их сближении

$$x_1 = -2.8847921, \quad x_2 = -2.8847787,$$

$$y_1 = 1.3382608, \quad y_2 = 1.3383492,$$

$$z_1 = -0.2480821, \quad z_2 = -0.2475921,$$

и при помощи (4) определяем наименьшее расстояние между астероидами 589 и 1564

$$\rho = 0.000498 \text{ а. е.}, \quad (20)$$

что приблизительно соответствует 74.5 тыс. км, равным 0.2 среднего расстояния между Землей и Луной и шести экваториальным диаметрам Земли. По сравнению с межпланетными расстояниями такое сближение является очень тесным и представляет большую редкость.

6. Вычисления углов проводилось нами с числом десятичных знаков на единицу большим, чем число десятичных знаков, с которым заданы исходные угловые элементы орбит. Полученный результат (20) совпадает с результатом (40) нашей предыдущей работы (1964). Таким образом, настоящая работа представляет еще одну возможность для вычисления величины сближения, которая может быть полезна и для контроля результатов, найденных ранее. В отличие от нашей работы (1964) вместо эксцентрических аномалий в качестве независимых переменных здесь используются истинные аномалии; поэтому становится возможным получение прямого решения с привлечением более простого — графического пути. Уравнения (12), фигурирующие в настоящей работе, проще соответствующих уравнений (23) из нашей работы (1964). Правда, соотношения (13) длиннее выражений (24) предыдущей работы (1964), записанных для эксцентрических аномалий E , однако эти соотношения (13) легко вычислимы, если пользоваться таблицами натуральных значений тригонометрических функций и настольной счетной машиной, хотя следует заметить, что в целом вычисления с v , несколько длиннее, чем с E .

Указанные выше астероиды представляют определенный интерес, так как в нашей работе (1964) показано, что их сближение может произойти в сравнительно скором будущем.

ЛИТЕРАТУРА

- Galle A. 1883. Zur Berechnung der Proximitäten von Asteroiden-Bahnen. Inaugural Dissertation, Breslau.
Lazović J. P. 1964. Važnije osobenosti u kretanju kvazikomplanarnih planetoida. Докторская диссертация, Београд.

Поступило в Редакцию
16 ноября 1965 г.

Кафедра астрономии
Естественно-математического факультета,
Белград.